INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND ZWEITES HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 11. Februar 1961

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,80*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus,** Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30
Fernsprecher 2 79 01 / Fernschreib-Nr. 04 — 61 723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01 / Fernschreib-Nr. 01 — 83 319

Inhalt:

Seite

Truesdell, C., Exact theory of self-expanding piston rings. Mit 4 Abbildungen ... 77

Feindt, E.-G., Berechnung der Strömung des Tandemgitters mit bewegter zweiter Schaufelreihe (2. Hauptaufgabe). Mit 7 Abbildungen ... 88

Szablewski, W., Turbulente Ausbreitung eines runden Heißluftstrahls in ruhender Außenluft. Erster Teil: Kernbereich. Mit 9 Abbildungen ... 96

Leipholz, H., Der schlanke Stab unter konservativer Belastung als Variationsproblem. Mit 2 Abbildungen ... 105

Kneschke, A., Berechnung stationärer Temperaturverteilungen ... 117

Kolberg, F., Der Strömungseinfluß auf den Wellenwiderstand von Schiffen. Mit 3 Abbildungen ... 123

Priebs, R., Ein einfaches Rechenschema zur Aufstellung der Frequenzgleichung eines an den Enden freien Drehschwingers. Mit 5 Abbidlungen ... 141

Manna, F., Zur Ermittlung der Wirkungslinie des Massenwiderstandes eben bewegter Scheiben und Getriebeglieder. Mit 5 Abbildungen ... 148

Mitterlehner, G., Berichtigung ... 152

INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND ZWEITES HEFT 1961

Exact theory of self-expanding piston rings

By C. Truesdell

1. Formulation of the problem. A piston ring must be shaped, when free of stress, in such a way that when inserted within a given cylinder it shall fit snugly. This requirement is idealized by requiring that the ring shall close exactly when subject to uniform normal pressure by the cylinder wall. While a new cylinder is circular, a worn one is not, so that rings for replacement ought to be of a somewhat different shape than were those originally installed; it is possible also that particular conditions of loading may make a non-circular shape desirable. In the present investigation, the shape of the ring is supposed to have an axis of symmetry passing through the point where the gap has been closed, but otherwise it is taken as an arbitrary plane curve (Fig. 1). Special attention, of course, is given to nearly circular forms.

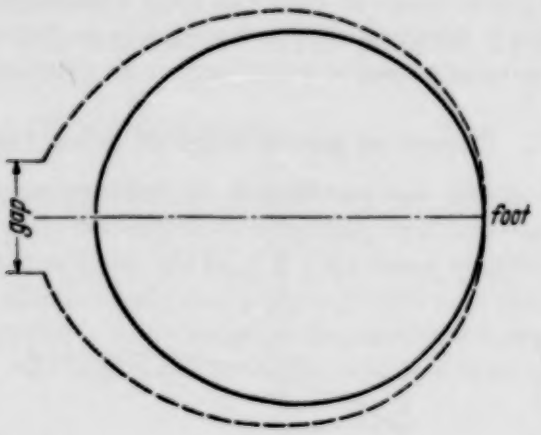


Fig. 1.

In all other respects, we adopt the same idealizations of the problem as did *Meldahl*[1] in his solution for the case of the perfectly circular ring. Effects of finite thickness of the ring are neglected, so that the normal pressure is supposed to be applied directly to the neutral line of a *Bernoulli-Euler* elastica. Moreover, the flexural rigidity EJ is assumed to be constant: in effect, the cross-section of the elastica is taken as uniform.

Thus, equivalently, our problem is as follows:

What form must be given to a cantilever of uniform flexural rigidity in order that it may be constrained by a uniform normal pressure to lie upon a given curve?

This is a problem of determining the free shape of a beam. When the deflections are small, it may be replaced by the conventional one of determining the shape assumed by a given beam when subject to given load. For piston rings which are to be used in extreme conditions, large wall pressures are needed, and to obtain them, in turn, the ring must be fabricated with a large ratio of gap to mean diameter. For such rings, there will be large deflections near the gap, just where requirements of performance are most critical, and the linearized theory is inadequate for precise design. This was recognized by *Meldahl* in his analysis for circular rings.

The above problem of free shape is solved here exactly, in the theory of finite deflection of an initially curved elastica.

At the end of Part II the exact solution, specialized to the case of elliptical cross-section, is made the basis of estimations of the error resulting from use of certain approximate theories. From this comparison it is inferred that while the theory of small deflections leads to results significantly in

[1] *Meldahl*, Teknisk Tidskrift 73 (1943) p. 99.

error, a method of perturbation about the exact solution for the circular ring yields formulae which are quite accurate for finite deflection of elliptical rings of small eccentricity.

In Part III is developed a general theory of nearly circular rings.

2. Historical origin of the problem of free shapes. In the theory of finite elastic deformations, the problem of determining the shape a body must have in order to assume a given shape when loaded is different from that of determining the form taken on by a given body in consequence of loading. This was recognized by *James Bernoulli* in the very first paper on the mathematical theory of elasticity, published in 1694[1]; in the list of „remaining" problems at the end is included „what should be the curvature of the band in order that from an attached load or from its own weight or from both together it assume the form of a straight line (this would be useful in designing the arms of balances and axles, where it is required that the centers of the motion and of the suspended bodies be collinear)."

One problem of this kind had been solved, in fact, by *James Bernoulli* prior to his writing the paper, but his cryptic note stating the result was not published until 1744[2]. In that same year appeared *Euler*'s great treatise on elastic curves[3], in which, among other problems, he took up those proposed by *James Bernoulli* and solved them. In particular, he obtained independently the solution of *James Bernoulli* for the form a band must have in order to be bent out straight by an assigned, normal, terminal load. The solution was expressed by each of its discoverers in terms of the integrals now named after *Fresnel*, and *Euler* remarked that the free shape is spiraliform.

Apparently the non-linear problem of free shapes lay untouched thereafter until *Meldahl's* solution for perfectly circular piston rings in 1943. In 1953 I outlined the general method[4] which is developed in more detail in the present study; in my earlier note, the explicit solution for a beam bent out straight by uniform normal pressure was given as an illustrative example.

Part I. Theory of piston rings of arbitrary form

3. Calculation of the bending moment resulting from uniform normal pressure. Consider a plane curve C to which a constant normal unit pressure P is applied (Fig. 2). We shall calculate the resultant moment, about an arbitrary point (X', Y'), of the load acting on the arc AB. For the moment dM exerted by the load on the element of arc dS at the point $Q(X, Y)$, where the slope is $\Theta = \text{Arctan}\,(dY/dX)$, we have

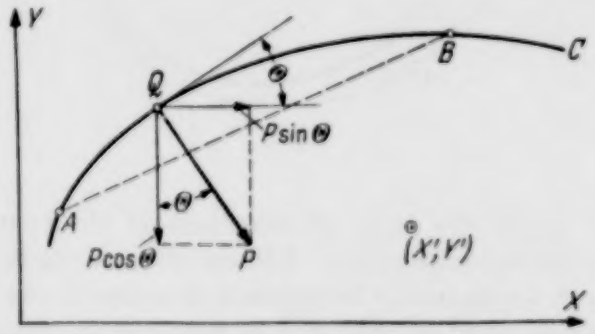


Fig. 2.

$$\begin{aligned} dM &= [-(P\cos\Theta)(X'-X) - (P\sin\Theta)(Y'-Y)]\,dS \\ &= P\,[(X-X')\,dX + (Y-Y')\,dY] \\ &= \frac{1}{2}\,P\,d\,[(X-X')^2 + (Y-Y')^2]. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] *Jak. Bernoulli*, Curvatura laminae elasticae . . . , Acta erud. Leipzig June 1694, p. 262—276 = Opera 1, p. 576—600. Part of this work has been published in a German translation by *Linsenbarth*, Ostwalds Klassiker No. 175, Leipzig 1910.

[2] *Jak. Bernoulli*, No. XX of Varia posthuma, Opera 2, p. 1084—1086 (1744); the editor, *Nicholas* I *Bernoulli*, who was the author's nephew, was unable to see any connection between the problem stated and the solution asserted without derivation.

[3] *L. Euler*, „Additamentum I de Curvis Elasticis" in Methodus inveniendi lineas curvas maximi mininive proprietate gaudentes, Lausanne and Geneva, 1744 = Opera Omnia I 24, p. 231—297. German translation by *Linsenbarth*, Ostwalds Klassiker No. 175, Leipzig 1910. English translation by *Oldfather, Ellis & Brown*, Isis 20, p. 72—160 (1933).

[4] *C. Truesdell*, Proc. First Midwest. Conf. Solid Mech., Univ. Illinois, p. 52—55 (1954).

The moment exerted by the load acting on AB is obtained by integrating this expression from A to B. But since $P = \text{const.}$, the right-hand side is a perfect differential. Hence the integral of (1) from A to B is independent of the path connecting A und B. Hence follows the

Equivalence principle. The resultant moments exerted by a constant normal pressure field on any two plane curves having the same endpoints are equal[1].

The only application we shall need is the simplest, when one of the two curves is a straight line. We may express the result as follows:

Method of equivalent chords. To calculate the resultant moment exerted by a constant normal pressure field on any arc, about any point, replace the arc by its chord.

The only application we shall need is the simplest, when the point about which the moment is taken is one end, B. We get

$$M = P L \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} P L^2 , \tag{2}$$

where L is the length of the chord AB.

4. The curvature of the free ring. According to the *Bernoulli-Euler* theory, a bending moment M produces a proportional change of curvature:

$$\frac{M}{E J} = K - \varkappa \tag{3}$$

where $\varkappa$ is the curvature of the free ring, K is the curvature of the loaded ring, and $E J$ is the flexural rigidity.

In the present application, by (2) we thus obtain

$$\varkappa = K - \frac{\frac{1}{2} P}{E J} L^2 . \tag{4}$$

Since the desired shape is prescribed in advance, all quantities on the right-hand side are known functions of arc length S. Since explicit knowledge of the curvature of a plane curve determines the curve itself, up to two arbitrary constants, our problem is now solved in principle.

5. Calculation of the slope of the free ring. Let ϑ be the slope of the free ring, Θ the slope of the loaded ring. Then

$$K = \frac{d\Theta}{dS} , \qquad \varkappa = \frac{d\vartheta}{ds} , \tag{5}$$

where dS and ds are the respective elements of arc. In the *Bernoulli-Euler* theory, the deformation is inextensional: $ds = dS$. Hence (4) may be written

$$\frac{d\vartheta}{dS} = \frac{d\Theta}{dS} - \frac{\frac{1}{2} P}{E J} L^2 . \tag{6}$$

Integration yields

$$\vartheta = \Theta - \frac{\frac{1}{2} P}{E J} \int_0^S L^2 \, dS , \tag{7}$$

where we have adjusted the arbitrary constant by taking the foot of the ring, where $\vartheta = \Theta$, as $S = 0$.

Write

$$c \equiv \frac{\frac{1}{2} P}{E J} , \tag{8}$$

[1] A proof based on *Stevin*'s priciple of solidification is given in my earlier paper, just cited. Professor *Grammel* informs me that the argument there presented was used by *A. Föppl*. Eq. (2) was obtained by *James Bernoulli* in No. 164 of his „Meditationes", written in 1691 but still unpublished.

and write $I = I(S)$ for the (geometrical) polar moment of inertia of the section of the loaded ring from $S = 0$ to the point of arc length S, taken about the free end (Fig. 3). Then (8) may be written

$$\theta = \Theta - c\, I\,. \tag{9}$$

Since J is an increasing function of S, we see from (9) mathematical proof of the evident fact that the maximum angular deflexion $\Theta - \theta$ occurs at the free end.

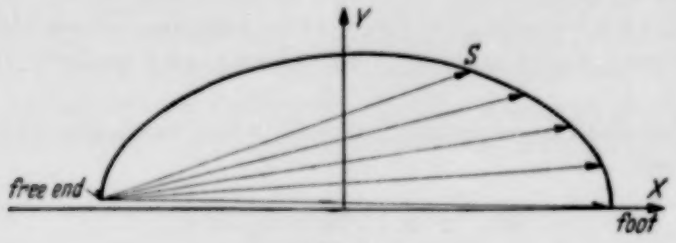


Fig. 3.

6. The exact shape of the free ring. Let a plane curve be given in complex form: $z = x + i\,y = x(s) + i\,y(s)$. Then

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\,\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\,\theta}\,. \tag{10}$$

Hence we may put (9) into the form

$$\frac{dz}{dS} = \frac{dz}{ds} = e^{i\,\theta} = e^{i\,(\Theta - c\,I)} = e^{i\,\Theta}\,e^{-i\,c\,I} = e^{-i\,c\,I}\,\frac{dZ}{dS}\,. \tag{11}$$

By integration follows

$$z = Z_0 + \int_{z_0}^{z} e^{-i\,c\,I}\,dZ\,, \tag{12}$$

where we have adjusted the constant of integration so that the foot of the ring, whose affix is $Z_0 = X_0 + i\,Y_0$, shall remain at the same point in both the free and loaded conditions. Separation of real and imaginary parts in (12) yields

$$x = X_0 + \int_{X_0}^{X} \cos(c\,I)\,dX + \int_{Y_0}^{Y} \sin(c\,I)\,dY\,, \qquad y = Y_0 + \int_{Y_0}^{Y} \cos(c\,I)\,dY - \int_{X_0}^{X} \sin(c\,I)\,dX\,. \tag{13}$$

[Caution: these are line integrals. When the ring is convex and when co-ordinates are chosen as in Figure 3, dX is negative, while dY changes sign. It is usually easier to proceed directly from (12).]

7. The maximum error of the linearized theory. If deviations of shape are negligible, we can get a sufficiently accurate result by taking the desired shape as the free shape, applying the load, and then reversing the displacement so obtained. Equivalently, we can reverse the load and interchange the roles of the curvatures. By applying the method of the previous sections, we should then get in place of (4)

$$K \approx \varkappa + \frac{\frac{1}{2}\,P}{E\,J}\,l^2\,, \tag{14}$$

where l is chord-length in the free beam. Comparison with the exact result (4) shows that the linearized theory is valid if and only if chord lengths are not significantly altered by loading.

The result of the small deflection theory can be obtained by taking the first term in the expansion of (12) or (13) in powers of $c\,I$, namely

$$z \approx Z_0 + \int_{Z_0}^{Z} (1 - i\,c\,I)\,dZ\,, \tag{15}$$

or

$$x \approx X + c\int_{Y_0}^{Y} I\,dY \equiv x^{(0)}\,, \qquad y \approx Y - c\int_{X_0}^{X} I\,dX \equiv y^{(0)}\,. \tag{16}$$

To estimate the error made by using the small deflection theory, we subtract (15) from (12), obtaining

$$z - z^{(0)} = \int_{Z_0}^{Z} (e^{-i c I} - 1 + i c I)\, dZ = \int_{Z_0}^{Z} \{[\cos (c I) - 1] - i [\sin (c I) - c I]\}\, dZ . \tag{17}$$

Hence

$$|z - z^{(0)}| \leqq \int_{Z_0}^{Z} |[\cos (c I) - 1] - i [\sin (c I) - c I]|\, |dZ|$$

$$\leqq \int_{0}^{S} [|1 - \cos (c I)| + |c I - \sin (c I)|]\, dS \leqq \int_{0}^{S} \left[\frac{1}{2} (c I)^2 + \frac{1}{6} (c I)^3\right] dS . \tag{18}$$

The error is worst at the free end. Denote by $\mathfrak{L}$ the length of the half ring, and by $\mathfrak{I}$ the value of I at the gap (i. e., $\mathfrak{I}$ is the polar moment of inertia of the desired form of the half ring about the gap). Then (18) yields

$$\frac{|z - z^{(0)}|}{\mathfrak{L}} \leqq \frac{1}{2} (c \mathfrak{I})^2 \left(1 + \frac{1}{3} c \mathfrak{I}\right). \tag{19}$$

When the load is small enough that the dimensionless quantity $c \mathfrak{I}$ is small, then a sharp estimate of the worst percentage error made by using the small deflection theory is afforded by (19). If $c \mathfrak{I}$ becomes appreciable with respect to 1, it is plain from (17) that the small deflection theory is no longer adequate.

As an example, consider a circular ring of radius R. Since $\mathfrak{I} = 2 \pi R^3$, if we define a dimensionless load factor

$$a \equiv 2 e R^3 = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} P}{E J} \cdot R^3 = \frac{P R^3}{E J}, \tag{20}$$

we get $c \mathfrak{I} = \pi a$, and (19) yields

$$\frac{|z - z^{(0)}|}{R} \leqq \frac{1}{2} \pi^3 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} \pi a\right). \tag{21}$$

For $a = 0.01$, the worst error made in using the small deflection theory is less than $^1/_3\%$. For $a = 0.05$, however, our bound (21) for the worst error becomes $4^1/_2\%$. Now our formula (21) does not prove that the error in the free gap as calculated by the small deflection theory will actually be as large as $4^1/_2\%$, and the load ratio $a = 0.05$ is rather high. However, this result suggests that in some conditions now encountered the small deflection theory will not be trustworthy. *Meldahl* has given more extensive and precise comparisons which lead to the same conclusion.

8. The quadratic theory and its maximum error. If we take one more term in the series expansion of the exponential in (12), we get

$$z \approx z^{(1)} = Z_0 + \int_{Z_0}^{Z} \left(1 - i c I - \frac{1}{2} c^2 I^2\right) dZ = z^{(0)} - \frac{1}{2} c^2 \int_{Z_0}^{Z} I^2\, dZ . \tag{22}$$

The method of estimating the error used in § 7 can be carried out again, and the result is

$$\frac{|z - z^{(1)}|}{\mathfrak{L}} \leqq \frac{1}{6} (c \mathfrak{I})^3 \left(1 + \frac{1}{4} c \mathfrak{I}\right). \tag{23}$$

For the case of a circular ring we get then

$$\frac{|z - z^{(1)}|}{R} \leqq \frac{1}{6} \pi^4 a^3 \left(1 + \frac{1}{4} \pi a\right). \tag{24}$$

If $a = 0.05$, the worst error is now less than $^1/_4\%$. For $a = .10$, the bound (24) becomes nearly 2%.

Our numerical estimates concern only the circular ring, but since they are rather rough and unflattering to the theory, we can use them with confidence for any nearly circular shape.

Part II. The elliptical piston ring

9. The exact solution for the elliptical ring. Consider a ring which is to be elliptical when loaded:

$$X = R\cos\psi\,, \qquad Y = R\sqrt{1-e^2}\sin\psi\,, \tag{25}$$

where e is the eccentricity and ψ is the running parameter. We shall suppose that the upper point of the gap occurs at $\psi = \pi$ (Figure 4); in other words, the ring is to close perfectly when loaded,

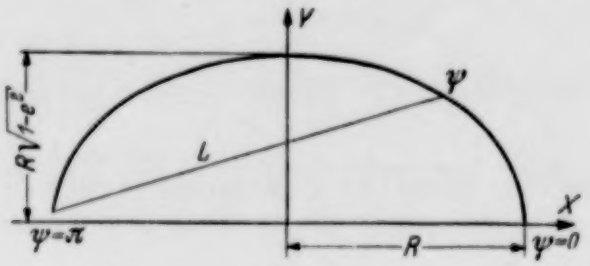


Fig. 4.

and the gap occurs at the end of the major axis. (Other elliptical cases can be obtained from our result by simple changes of the variables.)

For the chord-length L we have

$$\begin{aligned} L^2 &= (R + R\cos\psi)^2 + \left(R\sqrt{1-e^2}\sin\psi\right)^2 \\ &= R^2\left[\left(2\cos^2\frac{1}{2}\psi\right)^2 + (1-e^2)\left(2\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi\right)^2\right] = A\,R^2\cos^2\frac{1}{2}\psi\left(1-e^2\sin^2\frac{1}{2}\psi\right). \end{aligned} \tag{26}$$

[The case when $e = 0$ is equivalent to *Meldahl's* Eq. (3).] Hence

$$c\,I = c\int_0^\psi L^2\,dS = c\,R\int_0^\psi L^2\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}\,d\psi = a\,\Upsilon(\psi)\,, \tag{27}$$

where a is the dimensionless load ratio, again defined by (20), and where the dimensionless function Υ is defined by

$$\Upsilon(\psi) \equiv \int_0^\psi (1+\cos\xi)\left(1-e^2\sin^2\frac{1}{2}\xi\right)\sqrt{1-e^2\cos^2\xi}\;d\xi\,. \tag{28}$$

Furthermore, for the ellipse (25) we have

$$\begin{aligned} dZ = dX + i\,dY &= R\,[-\sin\psi + i\sqrt{1-e^2}\cos\psi]\,d\psi = i\,R\,[\sqrt{1-e^2}\cos\psi + i\sin\psi]\,d\psi \\ &= \frac{1}{2}\,i\,R\left[\sqrt{1-e^2}\,(e^{i\psi}+e^{-i\psi}) + e^{i\psi} - e^{-i\psi}\right]d\psi \\ &= \frac{1}{2}\,i\,R\left[\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)e^{i\psi} - \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)e^{-i\psi}\right]d\psi\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Putting (27) and (28) into the general expression (12) yields

$$\frac{z}{R} = 1 + \frac{1}{2}\,i\int_0^\psi \left\{\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)e^{i\,[\eta - a\,\Upsilon(\eta)]} - \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)e^{-i\,[\eta + a\,\Upsilon(\eta)]}\right\}d\eta\,. \tag{30}$$

By separating real and imaginary parts, we obtain the exact solution for the elliptical ring:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{R} &= 1 - \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\int_0^\psi \sin\left[\eta - a\,\Upsilon(\eta)\right]d\eta - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\int_0^\psi \sin\left[\eta + a\,\Upsilon(\eta)\right]d\eta\,, \\ \frac{y}{R} &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\int_0^\psi \cos\left[\eta - a\,\Upsilon(\eta)\right]d\eta - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\int_0^\psi \cos\left[\eta + a\,\Upsilon(\eta)\right]d\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

In these expressions, the function $\Upsilon(\eta)$ is to be obtained from (28). Thus our result gives the parametric equation of the free ring in terms of four double integrals.

Mr. *Warren de Witt* has kindly reduced the function $\Upsilon(\psi)$ to an expression in terms of elliptic integrals, as follows:

$$\Upsilon(\psi) = \sqrt{1-e^2\cos^2\psi}\left(\frac{1}{2}\sin\psi + \frac{e^2}{16}\sin\psi\cos\psi\right) + \frac{1-e^2}{2e}\log\frac{e\sin\psi + \sqrt{1-e^2\cos^2\psi}}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$+ \frac{1-e}{6}\sin\psi\,\mathrm{Arc\,sin}\,(e\cos\psi) + \frac{5-e^2}{6}\left[E\left(\psi-\frac{1}{2}\pi,\,e\right)+E\left(\frac{1}{2}\pi,\,e\right)\right]$$
$$+ \frac{1-e^2}{6}\left[F\left(\psi-\frac{1}{2}\pi,\,e\right)+F\left(\frac{1}{2}\pi,\,e\right)\right]. \tag{32}$$

The function $\Upsilon(\psi)$, being independent of the load, may be tabulated once and for all for each eccentricity e.

From (31) it is plain that double series expansions for x/R and y/R in powers of e and a may be obtained and will converge for all relevant values of the parameters, i. e., when $e<1$ and a is arbitrary.

10. The exact solution for the circular ring. When the ellipse reduces to a circle, we have $e=0$, and (24) becomes simply

$$\Upsilon(\psi) = \psi + \sin\psi\,. \tag{33}$$

Substitution in (24) yields

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{R} &= 1-\int_0^\psi \sin\left[(1-a)\,\eta - a\sin\eta\right]d\eta \equiv 1-\mathfrak{S}(a,\psi)\,,\\ \frac{y}{R} &= \int_0^\psi \cos\left[(1-a)\,\eta - a\sin\eta\right]d\eta \equiv \mathfrak{C}(a,\psi)\,.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

equivalent to *Meldahl's* Eq. (8). The functions $\mathfrak{S}(a,\psi)$ and $\mathfrak{C}(a,\psi)$ we shall employ again in § 14 and § 15.

11. The slightly deflected elliptical ring. When the load factor a is very small, or, equivalently, when deviations from the elliptical shape are insignificant, we may replace the exact solution (31) by the leading term in its expansion in powers of a; equivalently, we may put (27) and (29) into (15). The result is

$$\frac{x}{R} = \cos\psi + a\sqrt{1-e^2}\int_0^\psi \Upsilon(\eta)\cos\eta\,d\eta\,, \qquad \frac{y}{R} = \sqrt{1-e^2}\sin\psi + a\int_0^\psi \Upsilon(\eta)\sin\eta\,d\eta\,. \tag{35}$$

The function $\Upsilon(\eta)$ is not simplified in any way.

12. The elliptical ring of slight eccentricity. When the eccentricity e is small, the function $\Upsilon(\psi)$, defined by (28) in general, may be approximated as follows:

$$\Upsilon(\psi) \approx \int_0^\psi (1+\cos\xi)\left(1-e^2\sin^2\frac{1}{2}\xi\right)\left(1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\xi\right)d\xi$$
$$\approx \int_0^\psi (1+\cos\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}e^2\int_0^\psi (1+\cos^3\xi)\,d\xi = \left(1-\frac{1}{2}e^2\right)(\psi+\sin\psi) + \frac{1}{6}e^2\sin^3\psi\,. \tag{36}$$

Our exact solution (31) is now sufficiently approximated by

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{R} &= 1-\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)\int_0^\psi \sin\left[(1-m)\,\eta - m\sin\eta - n\sin^3\eta\right]d\eta\\ &\quad - \frac{1}{4}e^2\int_0^\psi \sin\left[(1+a)\,\eta + a\sin\eta\right]d\eta\,,\\ \frac{y}{R} &= \left(1-\frac{1}{4}e^2\right)\int_0^\psi \cos\left[(1-m)\,\eta - m\sin\eta - n\sin^3\eta\right]d\eta\\ &\quad - \frac{1}{4}e^2\int_0^\psi \cos\left[(1+a)\,\eta + a\sin\eta\right]d\eta\,,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

where

$$m \equiv a\left(1-\frac{1}{2}e^2\right), \qquad n=\frac{1}{6}a\,e^2. \tag{38}$$

A series expansion for these integrals in terms of Bessel functions, similar to that obtained by *Meldahl* for the case of the circle, is evidently possible, but the result will be rather elaborate, and numerical evaluation of the quadratures seems to be more practical.

13. Quadratic theory for the slightly elliptical ring. In the quadratic approximation for the ellipse of small eccentricity, we neglect not only terms of order in excess of e^2 but also terms of order $a^2\,e^2$. The resulting approximate equations for the free ring are

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{R} \equiv \frac{x}{R}-\cos\psi &= \frac{1}{4}a\left(-3-\frac{13}{6}a+\frac{49}{16}e^2\right)+\frac{1}{4}a^2\psi^2 \\
&\quad +a\left(1-e^2+\frac{5}{8}a-\frac{1}{2}\psi^2 a\right)\cos\psi+a\,(1-e^2+a)\,\psi\sin\psi-\frac{1}{4}a^2\psi\sin 2\psi \\
&\quad +\frac{1}{4}a\left(-1-\frac{1}{2}a+\frac{11}{12}e^2\right)\cos 2\psi+\frac{1}{24}a^2\cos 3\psi+\frac{1}{192}a\,e^2\cos 4\psi\,, \\
\frac{\Delta y}{R} \equiv \frac{y}{R}-\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\sin\psi &= \frac{1}{2}a\left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\psi+a\left(1-\frac{1}{2}e^2+a\left[\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\psi^2\right]\right)\sin\psi \\
&\quad -a\,\psi\left(1-\frac{1}{2}e^2+a\right)\cos\psi-\frac{1}{4}a\left(1-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{2}a\right)\sin 2\psi \\
&\quad +\frac{1}{4}a^2\psi\cos 2\psi+\frac{1}{24}a^2\sin 3\psi+\frac{a\,e^2}{192}\sin 4\psi\,.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

The accuracy of these formulae for the case $e=0$ was established in § 8. The terms arising from the eccentricity are in most cases of opposite sign from those arising from the second power of the load factor, suggesting that in the case of slight eccentricity these formulae are even more accurate than for the circular case.

The free gap f_G is given by

$$\frac{1}{2}\frac{f_G}{R}=\left.\frac{\Delta y}{R}\right|_{\psi=\pi}=\frac{3}{2}a\,\pi\left(1+\frac{5}{6}a-\frac{11}{24}e^2\right). \tag{40}$$

Since the maximum error occurs at the free gap, we get from (40) the following estimate of the accuracy of the linearized theory:

$$\text{Maximum percent error} \approx \left(\frac{5}{6}a-\frac{11}{24}e^2\right)\%. \tag{41}$$

[Caution: while this estimate is considerably sharper than (21), which was derived from more general considerations, it has been obtained by regarding the quadratic theory as correct. Thus it is not valid for large a, while (21) is valid (for the circular ring) without any restriction whatever.] In general e^2 will be considerably less than a; then increase in eccentricity for an oblong ring with fixed load ratio increases the accuracy of the linearized theory. For example, if $a=0.03$ and $e=0$, the maximum error is $2^1/_2\%$, while if $a=0.03$ and $e=0.10$, the maximum error is reduced to about 2%.

In a practical situation a is not known, but f_G/R is. From (40) we have, with considerable accuracy,

$$a=\frac{f_G}{3\,\pi\,R}\left[1-\frac{\frac{5}{6}\left(\frac{f_G}{3\,\pi\,R}\right)-\frac{11}{24}e^2}{1+\frac{5}{3}\left(\frac{f_G}{3\,\pi\,R}\right)-\frac{11}{24}e^2}\right]. \tag{42}$$

As an example, we select a ring for which $\frac{1}{2}f_G/R=0.15$, $e=0.10$. Then the load ratio according to the linearized theory is $a=(10\,\pi)^{-1}=0.03183$, while the more accurate formula (42) yields a value about 2% smaller: $a=0.3116$.

14. A nearly elliptical ring for which there is a simple but very accurate solution, valid for all loads. We return now to the results of § 12, which give the exact solution for an ellipse of small eccentricity. In (36) the eccentricity correction is proportional to $\psi + \sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi$. The percent error made by neglecting the last term is

$$E(\psi) = \frac{\frac{1}{3}\sin^3\psi}{\psi + \sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi}. \tag{43}$$

This function vanishes both at the foot of the ring and at the free gap, and its value nowhere exceeds 20%. When we recall that this is the percent error in a very small correction term, we see that no very large error, when e is small, will be made by using

$$\Upsilon(\psi) = \left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)(\psi + \sin\psi) \tag{44}$$

in place of (36). Equivalently, we shall consider a nearly elliptical ring for which (44) yields the solution.

To get the result of using (44) in (31), we need only put $n = 0$ in (37). Comparison with (34) yields

$$\frac{x}{R} = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)\mathfrak{S}(m,\psi) - \frac{1}{4}e^2\mathfrak{S}(-a,\psi), \qquad \frac{y}{R} = \left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)\mathfrak{C}(m,\psi) - \frac{1}{4}e^2\mathfrak{C}(-a,\psi). \tag{45}$$

The result (45) expresses the free shape approximately in terms of the functions $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{C}$ occurring in the exact theory of the circular ring. It shows us how to adjust and combine the results for circular rings in order to get those for nearly elliptical rings. The load ratios are altered, and negative values must be employed. Now negative load ratios occur in the problem of a ring subjected to internal rather than external pressure. Thus the result (45) indicates that the nearly elliptical ring may be obtained by properly superposing two circular ones, one subject to external and the other to internal pressure.

The advantage of the present solution is its simplicity. Let a table of solutions for the circular ring, for various load ratios, both positive and negative, be constructed once and for all. Then (45) enables us to use these same tables to get the free shape of elliptical rings by simple numerical substitutions.

15. Numerical specimen. So as to compare the accuracies of the various formulae, Mr. *Harrison Hancock* has calculated values for the elliptical ring in which $e = 0.085$ and $a = 0.03$. The exact free gap is given by $\frac{1}{2}f_C/R = 0.144251$. The free shape of this ring was calculated according to the following four formulae:

1. The exact solution (31).
2. The approximation (37) for small eccentricity.
3. The further approximation (39).
4. The semi-conjectured approximation (45).

In Table 1, the entries are the values of the rectangular co-ordinate to radius ratios, x/R and y/R, for the free ring, calculated at 15° intervals of the parameter ψ. The columns headed „Error" were calculated from results to seven decimal places, not shown in the table.

The quadratic approximation, given by (39), is seen to be not sufficiently accurate. For example, it gives a ratio f_C/R in error by nearly 13/100%. The approximation (37) is accurate to within 8 millionths of a radius; this is more accurate than is necessary. The semi-conjectured approximation (45) is accurate to within 40 millionths of a radius and yields a ratio f_C/R in error by less than 3/100%.

Thus, if the numerical example is a typical one, the semi-conjectured approximation (45) is adequate for current needs of design. It is to be emphasized that this formula yields a speedy solution for any elliptical ring of slight eccentricity in terms of a sufficiently extensive set of values of the two functions occurring in the exact solution for the circular ring.

Table 1.

(degrees)	Exact solution (31)	Approximate solution (37)	Error $\times 10^6$	Approximate solution (39)	Error $\times 10^6$	Approximate solution (45)	Error $\times 10^6$
$x/R = 0$	1.	1.	0	1.	0.0	1.	0
15	0.967 929	0.967 929	0.1	0.967 929	0.1	0.967 929	0
30	0.873 587	0.873 587	0.1	0.873 588	0.8	0.873 586	— 0.5
45	0.722 518	0.722 518	0.1	0.722 521	3.5	0.722 516	— 2.3
60	0.523 708	0.523 709	0.1	0.523 717	8.8	0.523 703	— 5.2
75	0.289 194	0.289 194	0.2	0.289 210	16.0	0.289 185	— 8.4
90	0.033 472	0.033 472	0.1	0.033 495	22.6	0.033 462	—10.2
105	—0.227 276	—0.227 276	0.3	—0.227 251	25.5	—0.227 286	— 9.6
120	—0.476 162	—0.476 162	0.2	—0.476 141	21.2	—0.476 169	— 7.5
135	—0.696 702	—0.696 702	0.2	—0.696 694	8.2	—0.696 707	— 5.0
150	—0.874 008	—0.874 008	0.2	—0.874 022	—13.6	—0.874 011	— 3.6
165	—0.995 927	—0.995 927	0.2	—0.995 970	—42.8	—0.995 930	— 3.0
180	—1.054 027	—1.054 027	0.2	—1.054 105	—77.0	—1.054 030	— 2.9
$y/R = 0$	0	0	0	0	0	0	0
15	0.258 226	0.258 228	1.6	0.258 227	1.5	0.258 228	1.6
30	0.500 860	0.500 863	3.3	0.500 862	2.7	0.500 863	3.0
45	0.713 126	0.713 131	4.8	0.713 130	4.1	0.713 129	3.2
60	0.881 878	0.881 884	5.9	0.881 886	7.7	0.881 879	.7
75	0.996 379	0.996 386	6.6	0.996 395	16.4	0.996 374	— 5.1
90	1.049 031	1.049 039	7.9	1.049 063	32.7	1.049 018	—12.9
105	1.035 988	1.035 996	8.0	1.036 044	56.4	1.035 966	—21.7
120	0.957 589	0.957 596	7.5	0.957 674	85.6	0.957 559	—29.4
135	0.818 532	0.818 538	6.6	0.818 649	117.1	0.818 497	—34.3
150	0.627 728	0.627 734	5.3	0.627 875	146.8	0.627 691	—37.1
165	0.397 803	0.397 807	3.8	0.397 974	170.9	0.397 764	—38.9
180	0.144 251	0.144 253	2.1	0.144 438	187.3	0.144 210	—40.6

Part III. Theory of nearly circular rings

16. General solution for nearly circular rings. In the general theory developed in § 6, the ring has been assumed to have one axis of symmetry but not necessarily two. The fact that the crank is inclined to the axis of the cylinder, or special conditions of installation, may make a somewhat ovoid form more desirable than the elliptical form, having two axes of symmetry, which was subjected to study in Part II.

If the numerical results given in § 15 may be taken as typical, we are not justified, in general, in adopting even a quadratic approximation in powers of the load ratio, but we are justified, for nearly circular shapes, in using a solution slightly perturbed from the one for the circle. Such a solution, for a general oval form, we now proceed to derive from the exact formula (12).

Let an equation for the upper half of the loaded ring, in polar co-ordinates r, Φ, be

$$r = R\,[1 + \varepsilon f(\Phi)]\,, \qquad 0 \leqq \Phi \leqq \pi\,, \tag{46}$$

where ε is a small parameter defining the eccentricity of the ring. The function $f(\Phi)$ we shall regard as given and fixed; there is no loss in generality in supposing that $f(0) = f(\pi) = 0$. We shall expand the exact solution (12) for this shape in powers of ε and discard all squares and higher powers.

For the chord length L we have

$$\begin{aligned} L^2 &= R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos(\pi - \Phi) \\ &= R^2 + R^2(1 + 2\,\varepsilon f) + 2\,R^2(1 + \varepsilon f)\cos\Phi = 4\,R^2(1 + \varepsilon f)\cos^2\frac{1}{2}\Phi\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Then, since $dS = R(1 + \varepsilon f)\,d\Phi$, we have

$$c\,I = c\int_0^S L^2\,dS = c\int_0^\Phi L^2 R(1 + \varepsilon f)\,d\Phi = 2\,a\int_0^\Phi [1 + 2\,\varepsilon f(\xi)]\cos^2\frac{1}{2}\xi\,d\xi = a\,[\Upsilon_0(\Phi) + \varepsilon\,\Omega(\Phi)]\,, \tag{48}$$

where

$$\Upsilon_0(\Phi) \equiv \Phi + \sin\Phi\,, \qquad \Omega(\Phi) \equiv 4\int_0^\Phi f(\xi)\cos^2\frac{1}{2}\xi\,d\xi\,. \tag{49}$$

First putting the exact solution (12) into the form

$$z = Z\, e^{-i\,c\,I} + i\,c \int_{Z_0}^{Z} e^{-i\,c\,I}\, Z\, L^2\, dS \tag{50}$$

and noting that $Z = r\, e^{i\,\Phi} = R\,(1+\varepsilon f)\, e^{i\,\Phi}$, by use of (47) and (48) we obtain

$$\begin{aligned}\frac{z}{R} &= (1+\varepsilon f)\, e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\, e^{-i\,a\,\varepsilon\,\Omega} + 2\,i\,a \int_0^{\Phi} e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\, e^{-i\,a\,\varepsilon\,\Omega}\,(1+\varepsilon f)^3 \cos^2\frac{1}{2}\,\Phi\, d\Phi \\ &= e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\,[1+\varepsilon\,(f - i\,a\,\Omega)] + 2\,i\,a \int_0^{\Phi} e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\,[1+\varepsilon\,(3f - i\,a\,\Omega)] \cos^2\frac{1}{2}\,\Phi\, d\Phi\,. \end{aligned} \tag{51}$$

We now express this result in terms of deviation from the exact solution $z^0 = z^0(a,\Phi) = x^0 + i\,y^0$ for the circle of radius R, given by (34). Setting

$$\delta z \equiv z - z^0 = \delta x + i\,\delta y\,, \tag{52}$$

we write (51) in the form

$$\frac{\delta z}{\varepsilon\, R} = e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\,(f - i\,a\,\Omega) + 2\,a \int_0^{\Phi} e^{i\,(\Phi - a\,\Upsilon_0)}\,(3\,i\,f + a\,\Omega) \cos^2\frac{1}{2}\,\Phi\, d\Phi\,. \tag{53}$$

Hence

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta x}{\varepsilon\, R} &= f(\Phi)\cos\left(\Phi - a\,\Upsilon_0(\Phi)\right) + a\,\Omega(\Phi)\sin\left(\Phi - a\,\Upsilon_0(\Phi)\right) \\ &\quad + 2\,a \int_0^{\Phi} \left[a\,\Omega(\xi)\cos\left(\xi - a\,\Upsilon_0(\xi)\right) - 3\,f(\xi)\sin\left(\xi - a\,\Upsilon_0(\xi)\right)\right] \cos^2\frac{1}{2}\,\xi\, d\xi\,, \\ \frac{\delta y}{\varepsilon\, R} &= f(\Phi)\sin\left(\Phi - a\,\Upsilon_0(\Phi)\right) - a\,\Omega(\Phi)\cos\left(\Phi - a\,\Upsilon_0(\Phi)\right) \\ &\quad + 2 f(\Phi) \int_0^{\Phi} \left[3\,f(\xi)\cos\left(\xi - a\,\Upsilon_0(\xi)\right) + a\,\Omega(\xi)\sin\left(\xi - a\,\Upsilon_0(\xi)\right)\right] \cos^2\frac{1}{2}\,\xi\, d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

These results express the deviation from the exact solution for the circle of radius R. They are similar in type to that obtained in § 12 for the elliptical ring [1] in that only the eccentricity parameter is supposed small, while the load ratio may be arbitrarily large. Thus, probably, the formulae (54) are more accurate than is necessary and may be simplified by approximations such as those leading to the semi-conjectured result (45) for the elliptical ring.

(Eingegangen am 17. März 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor *C. Truesdell*, Bloomington, Indiana (USA), 801 North College Avenue.

[1] To compare the results, put $\varepsilon = -\frac{1}{2}\,e^2$, $\Phi = \psi - \frac{1}{4}\,e^2 \sin 2\,\psi$, $f = \sin^2\psi = \sin^2\Phi + \frac{1}{4}\,e^2 \sin^2 2\,\Phi$.

Berechnung der Strömung des Tandemgitters mit bewegter zweiter Schaufelreihe

(2. Hauptaufgabe)

Von E.-G. Feindt

1. Einleitung. In letzter Zeit sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen die Durchströmung des aus zwei unbeweglichen Schaufelgittern bestehenden stationären Tandemgitters behandelt wird[1, 2, 3, 4]. Für die Praxis ist jedoch das instationäre Tandemgitter besonders wichtig, bei dem die erste Schaufelreihe feststeht und die zweite mit konstanter Geschwindigkeit U in Gitterfrontrichtung bewegt wird entsprechend der Leitrad-Laufrad-Anordnungen der Turbomaschinen (Abb. 1).

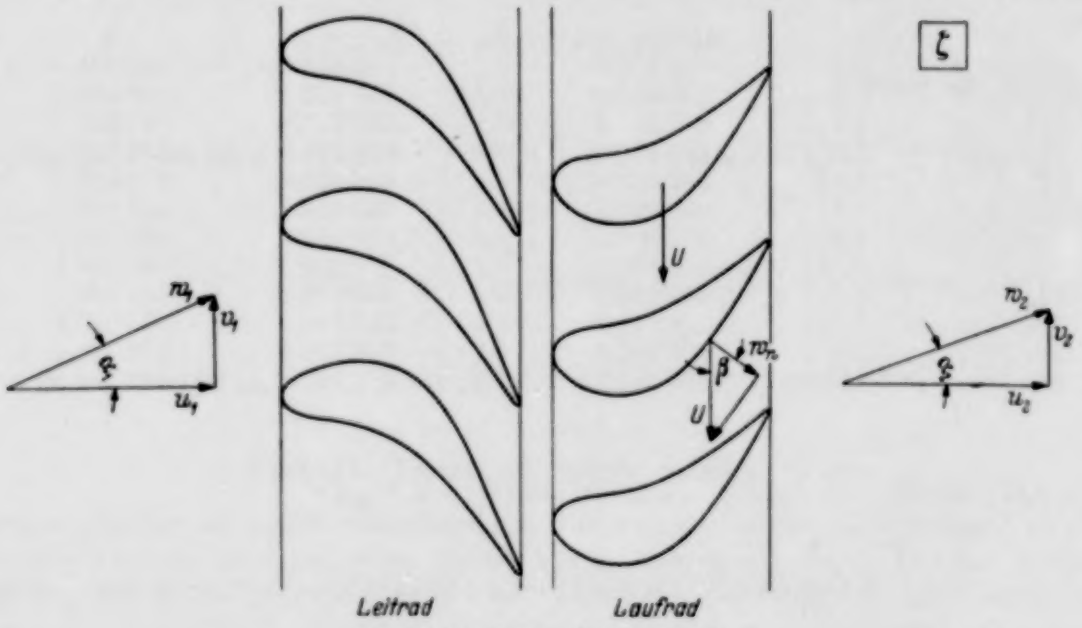


Abb. 1. Das Tandemgitter (ζ-Ebene).

Eine genäherte Berechnung der inkompressiblen Durchströmung des instationären Tandemgitters wurde kürzlich von *O. S. Müftüoglu*[5] durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, nach dem die exakte Lösung für diese Strömungsaufgabe berechnet werden kann. Das Verfahren wird am Beispiel des Tandem-Plattengitters erprobt.

2. Bezeichnungen. Es sollen bedeuten

l	die Profiltiefe,
t	die Teilung,
s	die Spaltweite,
$\zeta = \xi + i\,\eta$	komplexe Koordinaten der physikalischen Strömungsebene,
$z = x + i\,y$	komplexe Koordinaten der doppelperiodischen Strömungsebene,
$\overline{w} = u - i\,v$	die komplexe Geschwindigkeit,
U	die Geschwindigkeit, mit der sich das zweite Gitter bewegt,
w_n	die Normalkomponente der Geschwindigkeit,
w_t	die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit (w_n und w_t sind reelle Größen),
Q	die Quellstärke,
Γ	die Wirbelstärke,
q	die Quellverteilung.

[1] *W. E. Spranglin*, Flow through cascades in tandem. NACA TN 2393 (1951).
[2] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 102.
[3] *P. F. Byrd* and *M. F. Huggins*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 191.
[4] *H. Ohashi*, Ing.-Arch. 27 (1959), S. 201.
[5] *S. Müftüoglu*, Strömungsuntersuchungen an Tandem-Schaufelgittern. Jahrbuch 1957 der WGL, S. 208.

Ferner sind ϑ_1, ϑ_3, ϑ_4 Thetafunktionen und

$$\vartheta_1' = \frac{d\vartheta_1}{dz}, \quad \vartheta_3' = \frac{d\vartheta_3}{dz}, \quad \vartheta_4' = \frac{d\vartheta_4}{dz}$$

ihre Ableitungen.

Endlich sind $K(k)$ und $K'(k) = K\left(\sqrt{1-k^2}\right)$ die vollständigen elliptischen Normalintegrale erster Gattung mit dem Modul k.

Die Indizes sollen folgende Bedeutung haben:

a ein Profil des ersten Gitters,
b ein Profil des zweiten Gitters,
Q von Quellen Q induziert,
Γ von Wirbeln Γ induziert,
q von Quellverteilung q induziert,
1 weit vor dem Gitter,
2 weit hinter dem Gitter.

3. Das Rechenverfahren. In inkompressibler Strömung pflanzen sich die Störungen mit unendlich großer Geschwindigkeit im Strömungsfeld fort. Daher wird bei der instationären inkompressiblen Strömung das Geschwindigkeitsfeld in jedem Augenblick von den Randbedingungen bestimmt, die in dem Augenblick vorhanden sind. Die Vorgeschichte geht nur dann ein, wenn freie Wirbel in der Strömung sind, deren Lage im Strömungsfeld von der Vorgeschichte abhängt. Im folgenden wird angenommen, daß sich in der Strömung keine freien Wirbel befinden. Die Strömung durch das Tandemgitter kann dann als Potentialströmung berechnet werden, die in jedem Punkt der Profilkontur des ruhenden Gitters die Randbedingung $w_n = 0$ und in jedem Punkt der Profilkontur des bewegten Gitters die Randbedingung $w_n = U \cos\beta$ erfüllt (Abb. 1). Zur Lösung dieses Randwertproblems wird das Doppelgitter zunächst mit Hilfe der Funktion

$$\zeta^* = e^{\frac{2\pi}{t}\zeta} \tag{1}$$

auf eine ζ^*-Ebene konform abgebildet. Unter der Voraussetzung, daß die Teilung t für beide Gitter gleich ist, erscheint in der ζ^*-Ebene nur je eine Schaufel des ersten und des zweiten Gitters. Das Äußere dieser beiden Schaufeln wird nach bekannten Methoden[1] weiter abgebildet auf das Innere eines Rechtecks $ABADCD$ (Abb. 2). Dabei gehen die Schaufelkonturen in die vertikalen Rechteckseiten AA bzw. DD über. Durch die nacheinander ausgeführten konformen Abbildungen werde der unendlich Ferne Punkt $\zeta = -\infty$ auf den Punkt $z_1 = x_1 + i\,y_1$ der z-Ebene abgebildet. Entsprechend sei $z_2 = x_2 + i\,y_2$ das Bild des Punktes $\zeta = +\infty$. Wie beim Einzelgitter kann man schließen, daß in z_1 eine Wirbelquelle

$$Q_1 - i\,\Gamma_1 = (u_1 - i\,v_1)\,t$$

und in z_2 eine Wirbelsenke

$$Q_2 - i\,\Gamma_2 = (-u_2 + i\,v_2)\,t$$

liegt. Durch Spiegeln an den Rechteckseiten AA und DD sowie durch periodisches Fortsetzen über die beiden Seiten AD wird das Strömungsfeld des Rechtecks auf die volle z-Ebene ergänzt. Es entsteht so eine doppelperiodische Anordnung von Wirbelquellen, die die Geschwindigkeit induziern

$$\begin{aligned}\overline{w}_{Q,\Gamma} = {} & \frac{Q_1 - i\,\Gamma_1}{2\pi}\,\frac{\vartheta_4'\left(\frac{z-(z_1-iK')}{4K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z-(z_1-iK')}{4K}\right)} + \frac{Q_1 + i\,\Gamma_1}{2\pi}\,\frac{\vartheta_3'\left(\frac{z+(\overline{z_1-iK'})}{4K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{z+(\overline{z_1-iK'})}{4K}\right)} \\ & + \frac{Q_2 - i\,\Gamma_2}{2\pi}\,\frac{\vartheta_4'\left(\frac{z-(z_2-iK')}{4K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z-(z_2-iK')}{4K}\right)} + \frac{Q_2 + i\,\Gamma_2}{2\pi}\,\frac{\vartheta_3'\left(\frac{z+(\overline{z_2-iK'})}{4K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{z+(\overline{z_2-iK'})}{4K}\right)}.\end{aligned} \tag{2}$$

[1] *A. Betz*, Konforme Abbildung, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1948.

Für das Geschwindigkeitsfeld (2) sind die Rechteckseiten AA und DD Stromlinien, d. h. das Geschwindigkeitsfeld (2) entspricht dem stationären Doppelgitter ($U = 0$). Die Strömung für das Doppelgitter mit bewegter zweiter Schaufelreihe ergibt sich, wenn gemäß Abb. 2 auf den Vertikalen

$$x = K \pm 4\,n\,K \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Quellverteilungen

$$q = 2\,w_n(z)$$

angebracht werden, wobei

$$w_n(z) = U \cos\beta \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

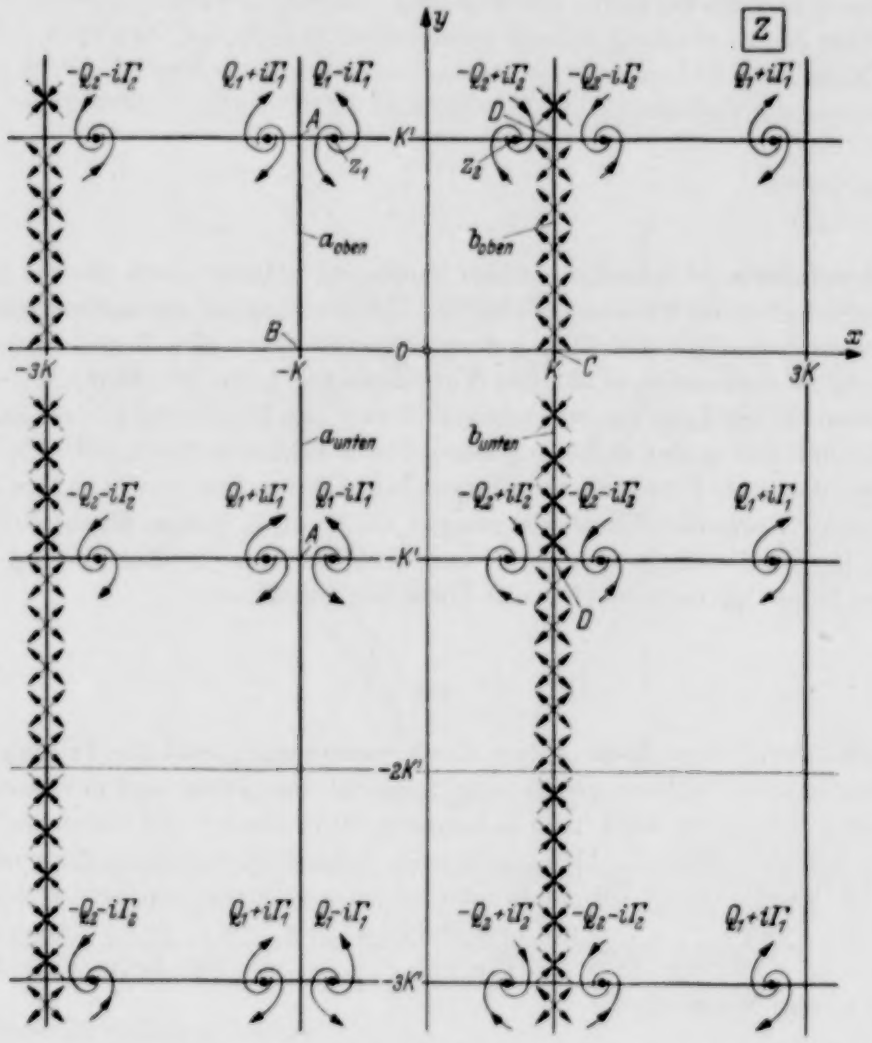


Abb. 2. Anordnung der Singularitäten in der z-Ebene. Die spezielle Lage von z_1 und z_2 gilt für das Zahlenbeispiel.

die auf die z-Ebene umgerechnete Geschwindigkeitskomponente normal zur Schaufeloberfläche des zweiten Gitters ist. Die Geschwindigkeiten, die die Quellverteilungen auf den Schaufeloberflächen induzieren, werden für die Schaufel DD aus der Gleichung

$$\overline{w}_q(K + i\,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} q(y') \frac{\vartheta_1'\left(\frac{i\,(y-y')}{4\,K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{i\,(y-y')}{4\,K}\right)}\,dy' \tag{3}$$

und für die Schaufel AA aus der Gleichung

$$\overline{w}_q(-K + i\,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} q(y') \frac{\vartheta_1'\left(\frac{-2\,K + i\,(y-y')}{4\,K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{-2\,K + i\,(y-y')}{4\,K}\right)}\,dy' \tag{4}$$

berechnet. Das Integral (3), dessen Integrand für $y = y'$ singulär wird, ist als *Cauchy*scher Hauptwert zu verstehen.

Zu den Geschwindigkeiten (2) und (3) bzw. (4) der z-Ebene kann man noch eine beliebige vertikale Parallelströmung $\overline{w} = -i\,c$ hinzufügen. Dieser Parallelströmung entspricht in der ζ-Ebene eine Zirkulationsströmung mit entgegengesetzt gleich großen Zirkulationen

$$\Gamma_a = 2\,c\,K' \text{ bzw. } \Gamma_b = -2\,c\,K'$$

der Schaufeln des ersten bzw. zweiten Gitters*. Hiermit erhält man für die resultierende Geschwindigkeit in der z-Ebene

$$\overline{w}(z) = \overline{w}_{Q,\Gamma} + \overline{w}_q - i\,c\,. \tag{5}$$

Im allgemeinen wird $\overline{w}_1 = u_1 - i\,v_1$ und damit auch $Q_1 = u_1$, $Q_2 = -u_2 = -u_1$ und $\Gamma_1 = v_1$ gegeben sein. $\Gamma_2 = -v_2$ und c folgen dann aus der *Joukowsky*-Bedingung, nach der in den Punkten B und D der z-Ebene die Geschwindigkeit $\overline{w}$ verschwinden muß. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung $\overline{w}(z)$ auf den Rechteckseiten AA und DD berechnet worden ist, folgt die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung des Tandemgitters (ζ-Ebene) aus der Gleichung

$$\overline{w}(\zeta) = \overline{w}(z)\,\frac{dz}{d\zeta}\,, \tag{6}$$

und die Schaufelzirkulationen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_a &= -\int_{-K'}^{K'} \mathrm{Im}\,\{\overline{w}(-K + i\,y')\}\,dy'\,, \\ \Gamma_b &= \int_{-K'}^{K'} \mathrm{Im}\,\{\overline{w}(K + i\,y')\}\,dy'\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Offenbar ist

$$\Gamma_a + \Gamma_b = -(\Gamma_1 + \Gamma_2)\,.$$

4. Zahlenbeispiel. Als Zahlenbeispiel wurde die Strömung für das in Abb. 3 dargestellte Doppelplattengitter berechnet, dessen Geometrie durch folgende Daten festgelegt ist: Teilung $t = 1$ für beide Gitter, Tiefe der Platten $l = 0{,}8$ für beide Gitter, Spaltweite $s = 0{,}2$.

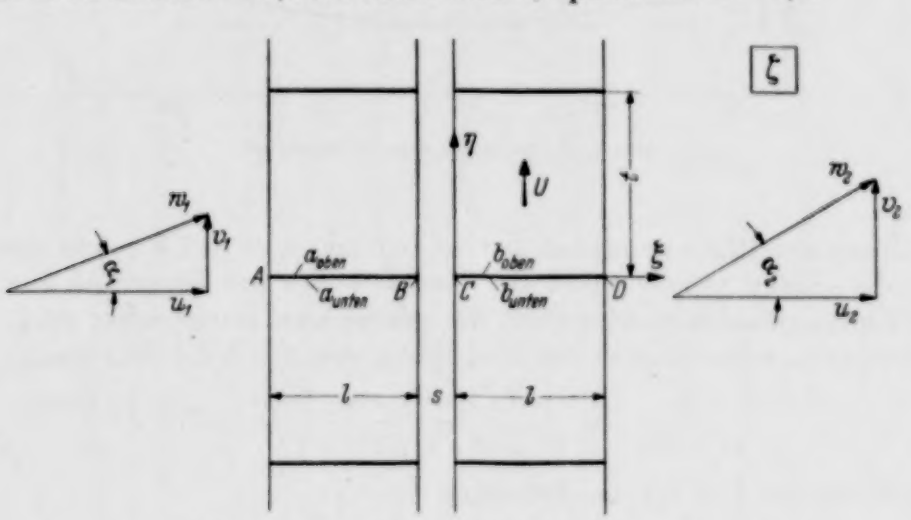


Abb. 3. Das Tandemplattengitter des Zahlenbeispiels.

Durch die konforme Abbildung (1) wird das Tandemplattengitter auf zwei einzelne Platten abgebildet, die mit den Strecken

$$0{,}00187 < \xi^* < 0{,}28461 \quad \text{und} \quad 1 < \xi^* < 152{,}40954$$

der ξ^*-Achse zusammenfallen. Durch die lineare Abbildung**

$$\tau = \frac{1{,}53348\,\zeta^* - 0{,}81809}{0{,}46651\,\zeta^* + 0{,}24887} \tag{8}$$

werden die beiden Platten auf die Strecken

$$-3{,}2643 < \tau < 1 \quad \text{und} \quad 1 < \tau < 3{,}2643$$

* Vgl. S. 245 des in Fußnote 1 von S. 89 genannten Buches von *Betz*.
** Vgl. S. 231 des Buches von *Betz*.

der reellen Achse der τ-Ebene abgebildet. Nachdem die beiden Platten in diese Normallage gebracht worden sind, ergibt sich für die anschließende konforme Abbildung auf ein Rechteck ein elliptisches Normalintegral erster Gattung

$$z = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\,(1-k^2\,\tau^2)}} \tag{9}$$

mit dem Modul $k = 1/3{,}2643 = 0{,}30635$. Da die beiden Platten sowie die Bilder $\tau = +3{,}2872$ der Punkte $\zeta = \pm\infty$ in der τ-Ebene auf der reellen Achse liegen, braucht das Integral (9) nur für reelle τ ausgewertet zu werden, was mit Hilfe der bekannter Tafeln[1] geschah.

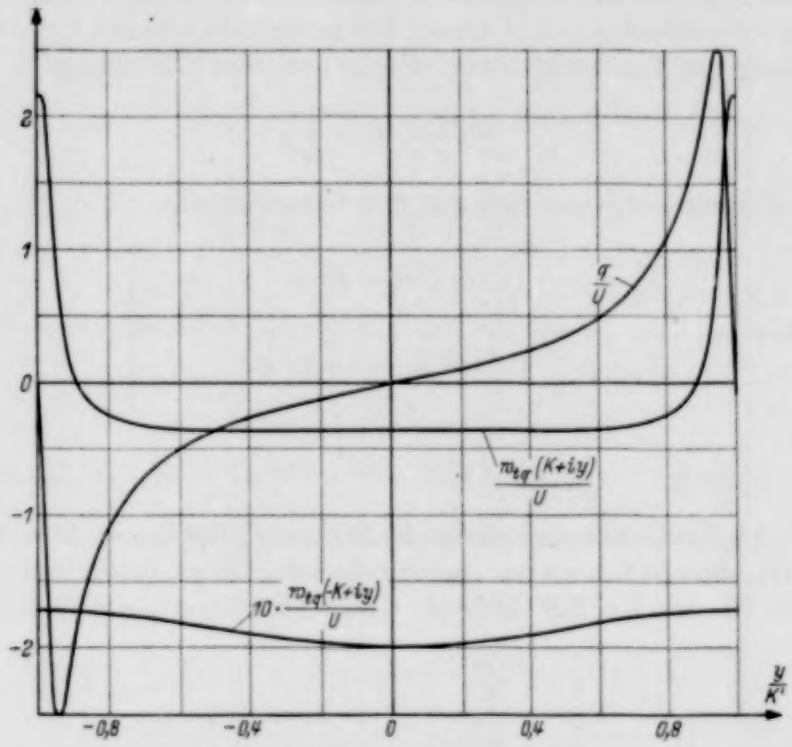


Abb. 4. Auftragungen zum Zahlenbeispiel.

In der Umgebung der Plattenendpunkte $\tau = \pm 1$ und $\tau = \pm 1/k$ reicht die Genauigkeit der Tafeln für die vorliegenden Zwecke nicht aus. Daher wurde der Integrand von (9) in diesen Bereichen durch Näherungsfunktionen ersetzt, die geschlossen integrierbar sind. Die Näherungsfunktionen ergeben sich, wenn man in der Umgebung von $\tau = 1$ die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\tau^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{(1-k^2)^3}}\,(\tau - 1)$$

und in der Umgebung von $\tau = 1/k$ die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}} + \frac{1}{k\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^3}}\left(\tau - \frac{1}{k}\right)$$

in (9) einsetzt.

Die halben Rechteckseiten K und K' sind gegeben durch die vollständigen elliptischen Normalintegrale $K(k) = 1{,}60973$ und $K'(k) = 2{,}60800$. Für die Bildpunkte z_1 und z_2 der unendlich fernen Punkte $\zeta = -\infty$ bzw. $\zeta = +\infty$ findet man $z_1 = -1{,}48624 + i\,K'$ bzw. $z_2 = 1{,}48624 + i\,K'$. Die Quellverteilung q wird aus der Gleichung

$$q = 2\,w_n(z) = 2\,w_n(\zeta)\,\frac{d\zeta}{dz} = 2\,U\,\frac{d\zeta}{d\zeta^*}\,\frac{d\zeta^*}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dz} \tag{10}$$

berechnet, die mit Hilfe von (1), (8) und (9) leicht ausgewertet werden kann. In Abb. 4 ist die Quellverteilung q zusammen mit den von ihr induzierten Geschwindigkeiten (3) und (4) aufgetragen. Die Integrale (3) und (4) wurden numerisch ausgewertet.

[1] *K. Hayashi*, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin 1930.

Die ϑ-Funktionen wurden aus den beiden ersten Gliedern ihrer Reihenentwicklung berechnet gemäß den Formeln

$$\vartheta_1\left(\frac{z}{4K}\right) \approx 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi \frac{z}{4K} - 2h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi \frac{z}{4K},$$

$$\vartheta_3\left(\frac{z}{4K}\right) \approx 1 + 2h \cos 2\pi \frac{z}{4K},$$

$$\vartheta_4\left(\frac{z}{4K}\right) \approx 1 - 2h \cos 2\pi \frac{z}{4K},$$

$$\vartheta_1'\left(\frac{z}{4K}\right) \approx \frac{\pi h^{\frac{1}{4}}}{2K} \cos \pi \frac{z}{4K} - \frac{3\pi h^{\frac{9}{4}}}{2K} \cos 3\pi \frac{z}{4K},$$

$$\vartheta_3'\left(\frac{z}{4K}\right) \approx -\frac{\pi h}{K} \sin 2\pi \frac{z}{4K},$$

$$\vartheta_4'\left(\frac{z}{4K}\right) \approx \frac{\pi h}{K} \sin 2\pi \frac{z}{4K},$$

$$\text{mit} \quad h = e^{-\pi \frac{K'}{2K}} = 0{,}078478 .$$

Wie beim ungestaffelten einfachen Plattengitter * läßt sich auch in dem vorliegenden Beispiel des Doppel-Plattengitters eine wesentliche Vereinfachung dadurch erzielen, daß man zunächst die Rechnung für die gitternormalen Geschwindigkeitskomponenten $u_1 = u_2 = 0$ durchführt und erst am Schluß der Rechnung eine Parallelströmung $\overline{w} = u_1 = u_2$ überlagert. Es ist dann in (2) $Q_1 = Q_2 = 0$ zu setzen, und das Geschwindigkeitsfeld der z-Ebene ergibt sich als Überlagerung der von den Wirbeln Γ_1 und Γ_2 induzierten Geschwindigkeitsfelder Abb. 5a bzw. 5b mit dem in Abb. 5c

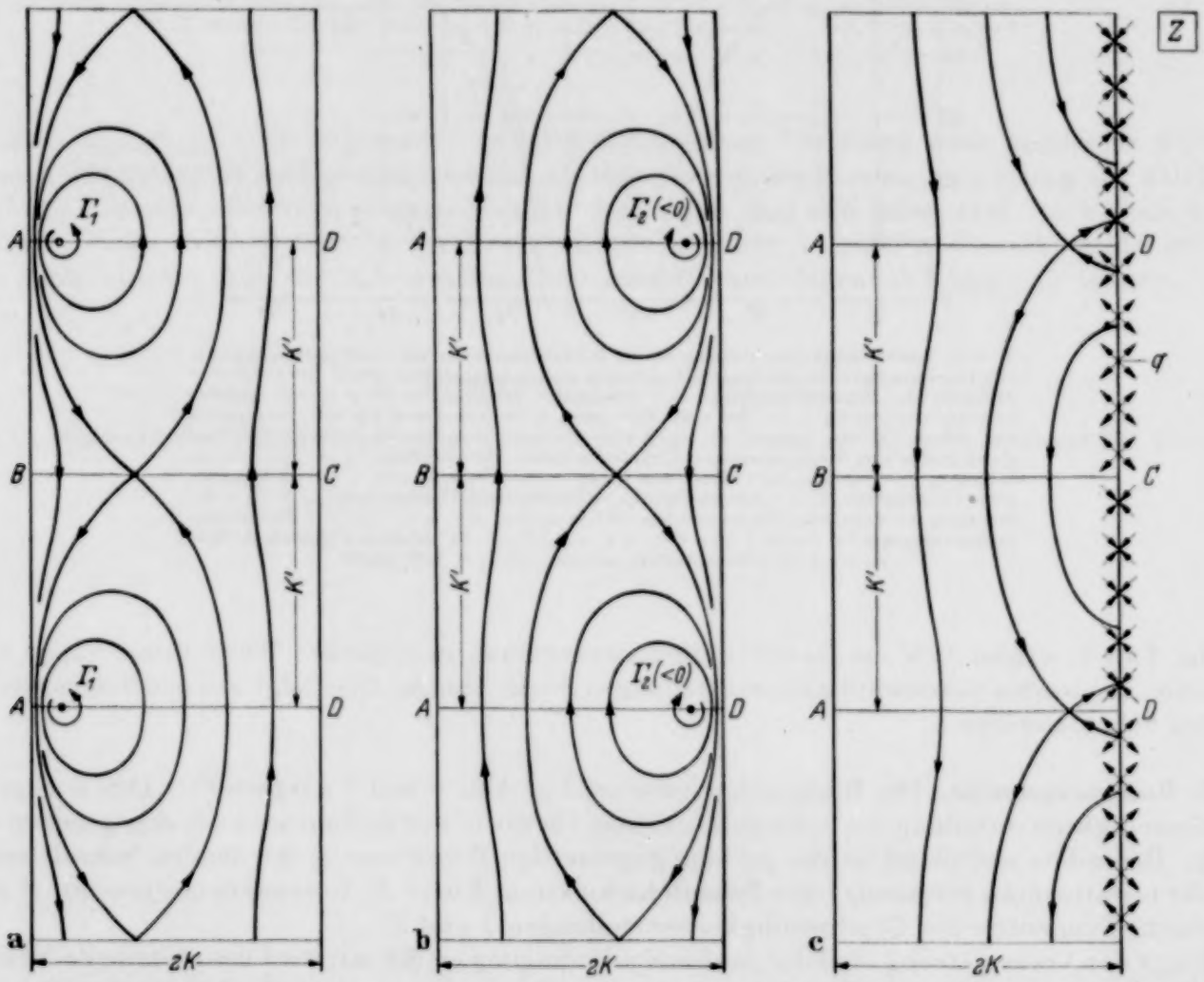


Abb. 5. Skizzen der Teilströmungen der z-Ebene. — a) Von den Wirbeln Γ_1 induzierte Strömung; b) von den Wirbeln Γ_2 induzierte Strömung; c) von der Quellverteilung induzierte Strömung. — Zu diesen drei Teilströmungen tritt als vierte noch eine vertikale Parallelströmung $\overline{w} = -ic$ hinzu.

* Vgl. das Buch von *Betz*.

skizzierten Geschwindigkeitsfeld, das von den Quellverteilungen induziert wird, und der Parallelströmung $\overline{w} = -i\,c$.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich eine einfache Rechenkontrolle daraus ergibt, daß die Geschwindigkeitsverteilungen für die folgenden beiden Strömungen gleich sein müssen:

a) $u_1 = u_2 = 0\,, \quad v_1 = v_2 = 1\,,. \quad \Gamma_a = \Gamma_b = 0\,,$
beide Schaufelreihen feststehend

b) $u_1 = u_2 = 0\,, \quad v_1 = v_2 = 0\,, \quad \Gamma_a = \Gamma_b = 0\,,$
beide Schaufelreihen mit der Geschwindigkeit $U = -1$ bewegt.

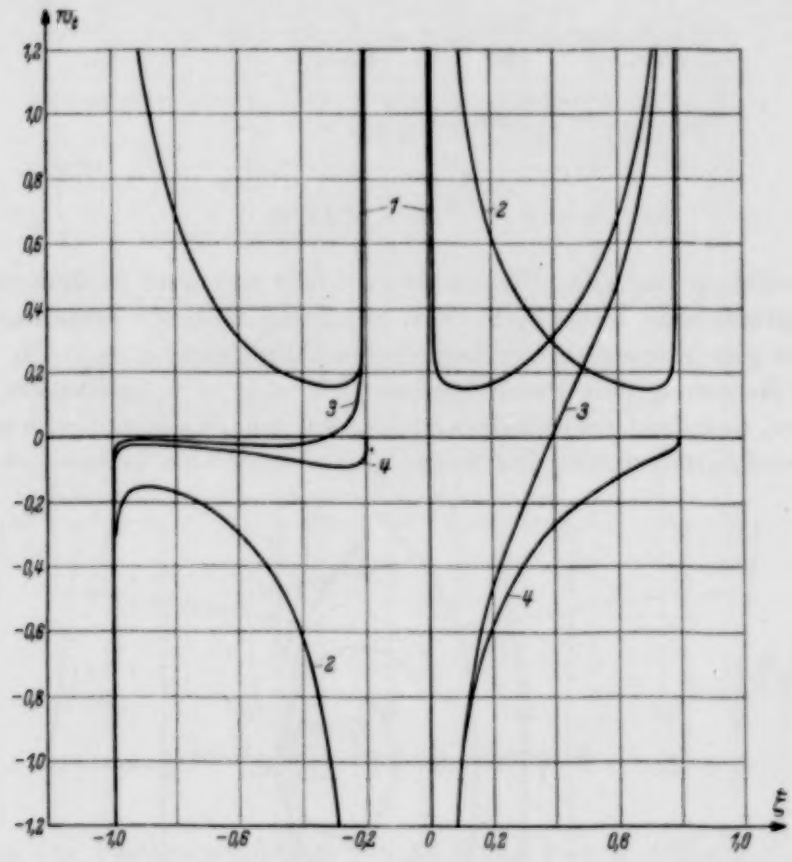


Abb. 6. Geschwindigkeitsverteilung für die Schaufeloberseiten des Tandemplattengitters. Die Geschwindigkeiten der Schaufelunterseiten sind entgegengesetzt gleich den Geschwindigkeiten der Schaufeloberseiten. — *1* Stationäres Tandemgitter ($U = 0$) mit gleicher Zirkulation $\Gamma_a = \Gamma_b = -1$ für beide Plattenreihen. Strömung weit vor bzw. weit hinter dem Gitter: $u_1 = u_2 = 0$, $v_1 = -v_2 = 1$. — *2* Stationäres Tandemgitter ($U = 0$) mit gleich großer aber entgegengesetzter Zirkulation beider Plattenreihen, $\Gamma_a = 1$, $\Gamma_b = -1$. Strömung weit vor bzw. weit hinter dem Gitter: $u_1 = u_2 = 0$, $v_1 = v_2 = 0$. — *3* Instationäres Tandemgitter, $U = 1$, mit der Zirkulation Null für beide Plattenreihen ($\Gamma_a = \Gamma_b = 0$). Strömung weit vor bzw. weit hinter dem Gitter: $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$. — *4* Strömungsbedingungen wie bei Kurve *3* (also $U = 1$, $u_1 = u_2 = v_1 = 0$), jedoch mit glattem Abfluß an den Plattenhinterkanten, wodurch sich $v_2 = 0{,}929$ ergibt.

Im Fall b) ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung in einfacher Weise durch sinngemäße Addition der beiden Geschwindigkeitsverteilungen *3* von Abb. 6. Dies folgt aus der Symmetrie der beiden Schaufelreihen.

5. Rechenergebnisse. Die Rechenergebnisse sind in Abb. 6 und 7 dargestellt. Abb. 6 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der Schaufeloberseiten für die in der Bildunterschrift angegebenen vier Fälle. Besonders auffallend ist die geringe gegenseitige Beeinflussung der beiden Schaufelreihen bei der instationären Strömung ohne Schaufelzirkulation, Kurve *3*. Besonders interessant ist auch die starke Symmetrie der Geschwindigkeitsverteilungen *1* und *2*.

Unter der Voraussetzung, daß die *Joukowsky*-Bedingung erfüllt ist, wird das strömende Medium von der bewegten Schaufelreihe mitgenommen, und man kann einen Mitführungskoeffizienten $(v_2 - v_1)/U$ definieren. Im Fall des Beispiels *4* von Abb. 6 hat dieser den Wert $(v_2 - v_1)/U = v_2/U = 0{,}929$. Dieser Wert gilt offenbar auch noch nach Überlagerung einer beliebig großen gitternormalen Geschwindigkeitskomponente $u_1 = u_2$.

Als Letztes ist in Abb. 7 der Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit U auf die Geschwindigkeitsverteilung dargestellt. Für $U = 0$ stimmt die Geschwindigkeitsverteilung mit der nach *Nickel** berechneten überein.

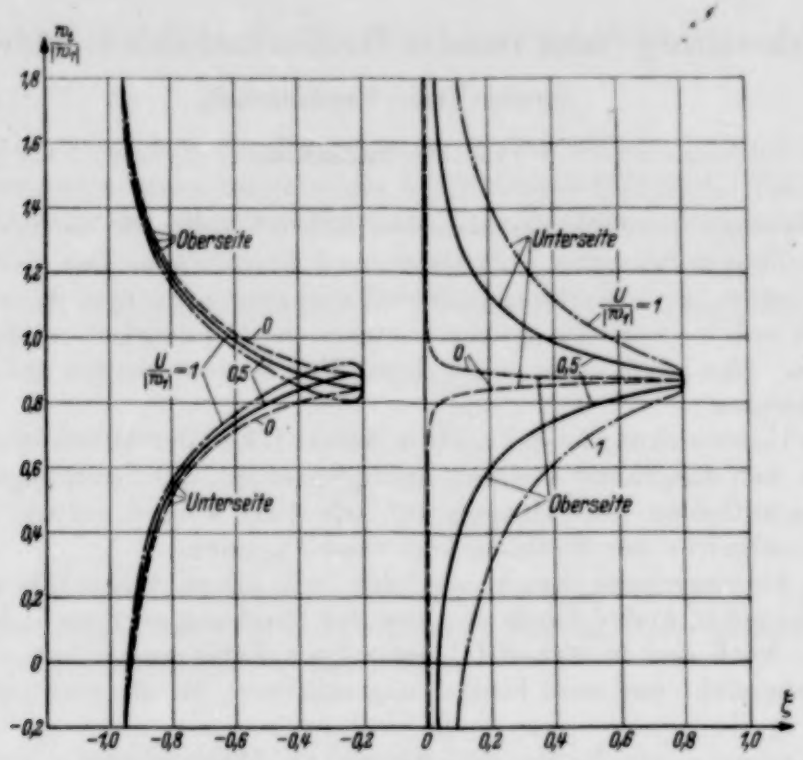


Abb. 7. Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit U auf die Geschwindigkeitsverteilung des Tandemplattengitters mit Zuströmwinkel $\alpha_1 = 30°$. Die Rechnung ergibt die Abströmwinkel: $\alpha_2 = 0{,}21°$ für $U/|w_1| = 0$; $\alpha_2 = 29{,}8°$ für $U/|w_1| = 0{,}5$; $\alpha_2 = 42{,}1°$ für $U/|w_1| = 1$.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß das beschriebene Verfahren nach Fortlassen der konformen Abbildung (1) auch geeignet ist für die Berechnung der ebenen Strömung um zwei beliebige Körper, die sich gegeneinander bewegen und sich dabei evtl. auch noch in beliebiger Weise deformieren. In der Literatur scheint diese Aufgabe noch nicht gelöst zu sein. Als Beispiel wäre etwa der Klappenflügel mit schnell ausschlagender Klappe zu nennen.

(Eingegangen am 11. März 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Ernst-Günther Feindt*, Hamburg-Garstedt, Breslauer Str. 13

* Siehe Fußnote 2 von Seite 88.

Turbulente Ausbreitung eines runden Heißluftstrahls in ruhender Außenluft

Erster Teil: Kernbereich

Von W. Szablewski

1. Einleitung. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] habe ich die turbulente Ausbreitung runder Heißtluftstrahlen in bewegter Luft theoretisch beschrieben. Der Fall ruhender Außenluft war dabei in die genannte Untersuchung nicht mit einbezogen worden, da er gegenüber dem Fall bewegter Außenluft eine wesentlich größere numerische Genauigkeit in der rechnerischen Behandlung erforderte. Aber auch sonst weist dieser Fall Besonderheiten auf, auf die wir noch zu sprechen kommen werden.

Die Methode der Untersuchung besteht, wie in Arbeit III, in der Anwendung eines Fortsetzungsverfahrens, bei dem wir, ausgehend von den Anfangsprofilen, das Strömungsfeld approximativ in Differenzenschritten aufbauen. Mit Hinweis auf Arbeit III werden wir uns im Folgenden in der Schilderung der Einzelheiten der Methode kurz fassen können.

Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich, wie schon Arbeit III, auf den sog. Kernbereich des Mischungsfeldes, der durch den von der Mischung noch nicht berührten Strahlkern gekennzeichnet ist. Nach den in Arbeit III gemachten Erfahrungen begnügen wir uns bei der Erfassung des Kernbereichs mit zwei Fortsetzungsschritten, die als praktisch ausreichend anzusehen sind.

Unter Vernachlässigung von Reibungseinflüssen der Düsenwandung werden die Profile der Geschwindigkeit und Temperatur in der Düsenmündung als rechteckig angenommen.

2. Gleichungssystem des Mischungsfeldes. Unter der Voraussetzung konstanten Drucks lauten die Gleichungen[2] des rotationssymmetrischen Mischungsfeldes (Abb. 1), das als im zeitlichen Mittel stationär angenommen wird:

Impuls:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\overline{\varrho\,u\,v}}{\partial r} = \varepsilon(x)\left(r\,\bar{\varrho}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + E\,r\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right), \tag{1}$$

Energie:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T\,u}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T\,v}}{\partial r} = E\,\varepsilon(x)\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p\,T}}{\partial r}\right), \tag{2}$$

Masse:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{v}}{\partial} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right). \tag{3}$$

(Die Querstriche, die zeitliche Mittelwertbildung bezeichnen, werden im Folgenden fortgelassen.) Es bedeuten dabei x, r Zylinderkoordinaten und u, v die entsprechenden Geschwindigkeitskompo-

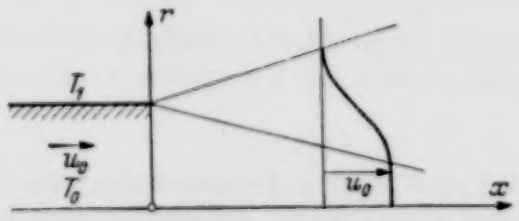


Abb. 1. Geschwindigkeitsfeld.

nenten, ϱ die Dichte, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck. E ist eine empirische Zahl und ein Maß dafür, daß den substantiellen Eigenschaften eines Flüssigkeitselements eine andere Länge des Mischungsweges für den turbulenten Austausch zuzuschreiben

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 26 (1958) S. 358; zitiert als Arbeit III.
[2] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 10; zitiert als Arbeit II.

ist als der Druckschwankungen während des Transports ausgesetzten Geschwindigkeit; wie in den Arbeiten II und III setzen wir hier

$$E = 2\,. \tag{4}$$

Die scheinbare kinematische Zähigkeit der Strömung wird gleich

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1\, b_1(x)\, u_0 \tag{5}$$

gesetzt, wo u_0 die Geschwindigkeit des Düsenstrahls in der Mündung, $b_1(x)$ die Mischbreite des Geschwindigkeitsfeldes und $\varkappa_1$ einen empirischen Koeffizienten bedeuten. Mit T_0 bzw. T_1 werden des weiteren die Temperatur des Düsenstrahls in der Mündung bzw. die Temperatur der Außenluft bezeichnet.

Die Größe c_p wird als Konstante behandelt. Mittels der Zustandsgleichung für ideale Gase bei konstantem Druck

$$\varrho\, T = \text{konst.} \tag{6}$$

ersetzen wir in den Gleichungen ϱ durch $\vartheta\,(= T - T_1)$:

$$\varrho = \frac{\text{konst.}}{T_1}\,\frac{1}{1 + (\vartheta/T_1)}\,. \tag{7}$$

Es werden weiter die dimensionslosen Funktionen $\varphi = u/u_0$ und $\chi = \vartheta/\vartheta_0$, wo $\vartheta_0 = T_0 - T_1$ ist, eingeführt und die Längen mit dem Düsenradius r_0 dimensionslos gemacht. Transformation der Gleichungen (1) bis (3) auf die Strahlenkoordinate

$$\eta = \frac{r - r_0}{x} \tag{8}$$

ergibt dann, wenn wir noch mit dem Streckungsfaktor

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\,\varkappa_1\, c_1}} \qquad \left(c_1 = \frac{b_1}{x}\right) \tag{9}$$

die Variablen $\xi = (1/\sigma)\,(x/r_0)$ und $y = \sigma\,\eta$ einführen und ψ für $\sigma\, v/u_0$ schreiben, schließlich folgendes Gleichungssystem (vgl. Arbeit III):

Impuls:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[2\,(\varphi\, y - \psi) - \underline{(E+1)\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\partial\chi/\partial y}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}} + \frac{\xi}{1+\xi\, y}\right] - 2\,\xi\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0\,, \tag{10}$$

Energie:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\left[\frac{2}{E}\,(\varphi\, y - \psi) - \underline{2\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\partial\chi/\partial y}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}} + \frac{\xi}{1+\xi\, y}\right] - \frac{2}{E}\,\xi\,\varphi\,\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = 0\,, \tag{11}$$

Masse:

$$\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\,\frac{\xi}{1+\xi\, y} = 0\,. \tag{12}$$

Im Vergleich mit dem Feld konstanter Dichte treten die unterstrichenen Glieder zusätzlich auf.

Dabei haben wir (vgl. Arbeit III) vorausgesetzt, daß für das einzelne Modell, gekennzeichnet durch den Geschwindigkeitsparameter $(u_0 - u_1)/u_0$ (u_1 Geschwindigkeit der Außenluft) und den Temperaturparameter ϑ_0/T_1,

$$\sigma(x) = \text{konst.} \tag{13}$$

ist. Man kann diese Voraussetzung auch so lesen, daß für den Kernbereich $\varkappa_1$ und b_1/x als Konstanten angesehen werden können.

Die Randbedingungen lauten im Kernbereich, wenn man beachtet, daß die Strahlachse die Koordinate $y = -1/\xi$ hat,

$$\varphi, \chi \to \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad y \to \begin{cases} -1/\xi \\ \infty \end{cases}, \tag{14}$$

Weiter ist Verschwinden der Querkomponente auf der Strahlachse zu fordern:

$$\psi \to 0 \qquad \text{für} \qquad y \to -1/\xi\,. \tag{15}$$

Als Anfangsbedingung ergeben sich für $\xi \to 0$ aus den Gleichungen (1) bis (3) Profile der Geschwindigkeit φ_0, ψ_0 und Temperatur χ_0, die wir bereits in Arbeit II berechnet haben und die, wie wir anmerken wollen, die turbulente Auflösung des Randes eines ebenen Heißluftstrahls beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\xi, y) &\to \varphi_0(y) \\ \psi(\xi, y) &\to \psi_0(y) \\ \chi(\xi, y) &\to \chi_0(y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{für} \quad \xi \to 0\,. \tag{16}$$

Gemäß der Annahme (13) $\sigma(x) = \text{konst.}$ können wir $\sigma(x)$ der Arbeit II [$\sigma = \sigma(0)$] entnehmen. Dort hatten wir die Breite $\sigma\, c_1$ der Geschwindigkeitsverteilung im y-Maßstab zwischen den Grenzen 0,95 und 0,05 der berechneten Verteilung abgelesen. Der Vergleich mit den Messungen von *O. Pabst*[1] ergab dann für den empirischen Koeffizienten $\varkappa_1$ den Zahlenwert 0,0082.

3. Fortsetzungsverfahren. Wir berechnen im Folgenden die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder bei Ausbreitung des Düsenstrahls in ruhender Außenluft für die Temperaturparameter $\vartheta_0/T_1 = 0, 1, 2$.

a) Erster Fortsetzungsschritt. Differentiation der Gleichungen (10) bis (12) ergibt (vgl. Arbeit III), für die benötigten Ableitungen $(\partial\varphi/\partial\xi)_{\xi=0}$ bzw. $(\partial\chi/\partial\xi)_{\xi=0}$ bzw. $(\partial\psi/\partial\xi)_{\xi=0}$, bezeichnet mit Φ_0 bzw. X_0 bzw. Ψ_0 die Gleichungen

$$\Phi_0'' + \Phi_0'\left(\frac{-\varphi_0''}{\varphi_0'}\right) + \varphi_0'\left[2\,(\Phi_0\, y - \Psi_0) - (E+1)\left(\frac{(\vartheta_0/T_1)\,X_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_0}\right)' + 1\right] - 2\,\varphi_0\,\Phi_0 = 0 \tag{17}$$

mit den aus (14) folgenden Randbedingungen

$$\Phi_0 \to 0 \qquad \text{für} \qquad y \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}, \tag{18}$$

weiter

$$X_0'' + X_0'\left(\frac{-\chi_0''}{\chi_0'}\right) + \chi_0'\left[\frac{2}{E}\,(\Phi_0\, y - \Psi_0) - 2\left(\frac{(\vartheta_0/T_1)\,X_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_0}\right)' + 1\right] - \frac{2}{E}\varphi_0\, X_0 = 0 \tag{19}$$

mit den (14) gemäßen Randbedingungen

$$X_0 \to 0 \qquad \text{für} \qquad y \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}, \tag{20}$$

schließlich, eingedenk (15),

$$\Psi_0 = -\int_{-\infty}^{y} \psi_0\, dy + y\,\Phi_0 - 2\int_{-\infty}^{y} \Phi_0\, dy\,. \tag{21}$$

Die in den Gleichungen auftretenden Funktionen φ_0, φ_0' und χ_0, χ_0' sowie ψ_0 wurden, wie erwähnt, bereits in Arbeit II berechnet.

Das Gleichungssystem (17) bis (21) haben wir mittels des in Arbeit III beschriebenen Iterationsformalismus gelöst. Die nach zahlreichen Iterationen erhaltenen Verteilungen für Φ_0, X_0 sind in Abb. 2 dargestellt. Die Verteilungen zeigen, wie in Arbeit III, eine mit dem Parameter ϑ_0/T_1 gehende Linksversetzung der Kurven, die dem analogen Verhalten der Anfangsprofile (Arbeit II) entspricht. Auch die mit ϑ_0/T_1 wachsende Amplitude entsprechend der mit größer werdenden Temperaturdifferenz zu erwartenden stärkeren Krümmung der Isotachen und Isothermen zur Achse hin tritt wieder in Erscheinung. Als Besonderheit gegenüber den sich im Fall bewegter Außenluft ergebenden Verteilungen ist jedoch zu konstatieren, daß hier unsere Verteilungen für große positive y vor dem Abklingen gegen Null zu positiven Werten übergreifen, was einer Abkrümmung der äußeren Isotachen und Isothermen von der Achse weg bzw. einem konkaven Verlauf dieser Kurven entspricht. Diese dem Fall ruhender Außenluft zukommende Erscheinung ist eine Eigentümlichkeit der zugrundegelegten Theorie, wie ein Vergleich mit dem Verhalten der analogen Kurven für den Fall $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}95$, also fast ruhender Außenluft, zeigt (Abb. 3). Man sieht, daß auch hier diese Eigentümlichkeit, wenn auch in stark reduzierter Form, festzustellen ist.

[1] *O. Pabst*, U. u. M. 8004 (1944).

Ausgehend von den Anfangsprofilen φ_0, χ_0 ist dann der erste Fortsetzungsschritt durchführbar und liefert mit der Schrittweite a approximativ die Profile

$$\varphi_1 = \varphi_0 + a\,\Phi_0\,, \qquad \chi_1 = \chi_0 + a\,X_0\,. \tag{22}$$

In der vorliegenden Rechnung wurde die Schrittweite $a = 0{,}2$ genommen.

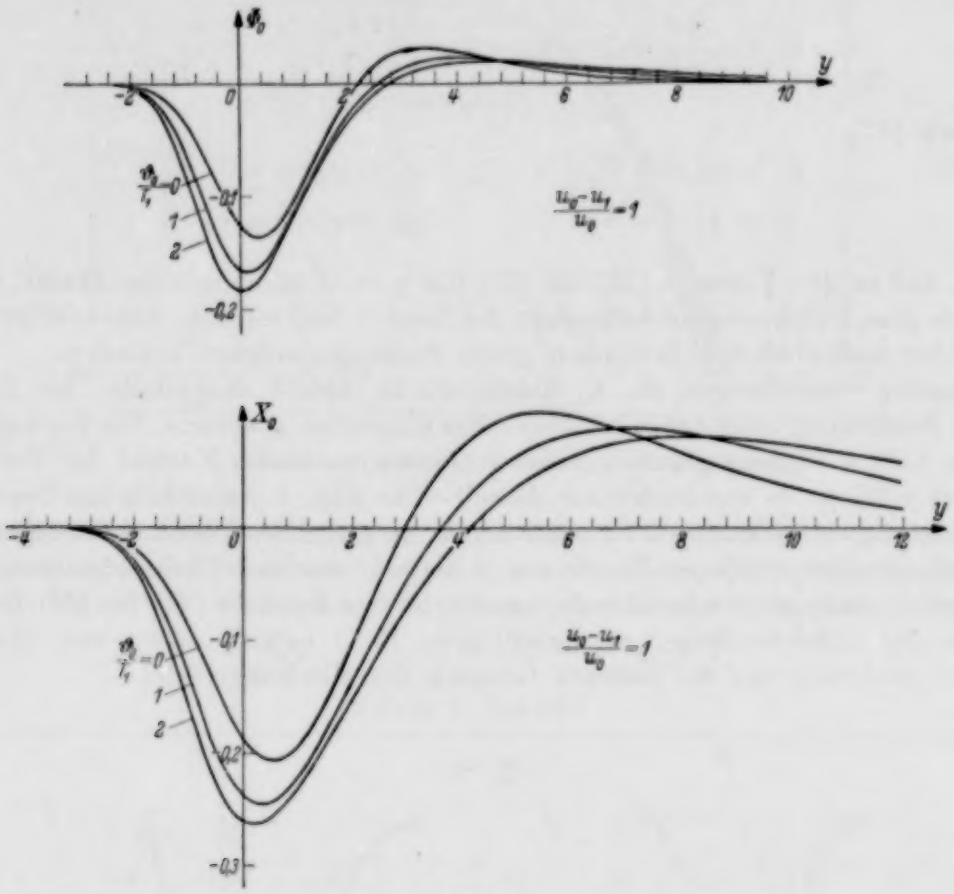


Abb. 2.

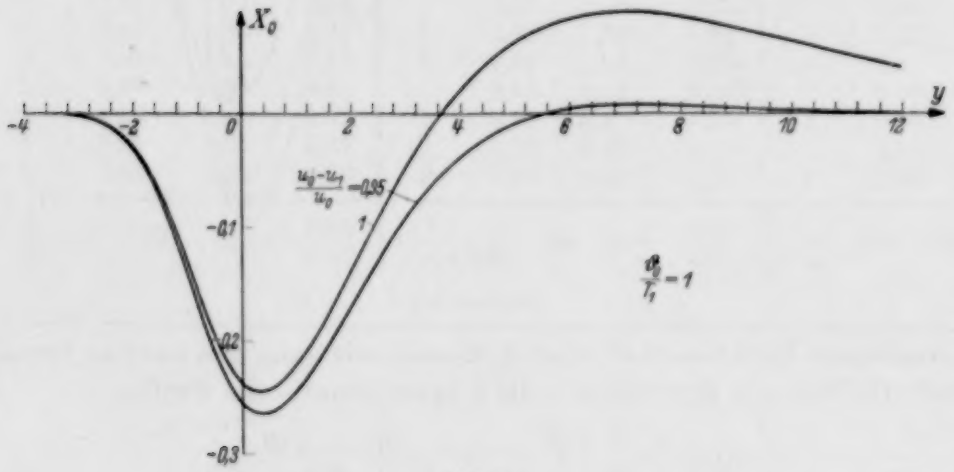


Abb. 3.

b) Zweiter Fortsetzungsschritt. Nachdem wir oben φ_1 und χ_1 ermittelt haben, berechnen wir des weiteren zunächst das Profil ψ_1 der Querkomponente der Geschwindigkeit an der Stelle $\xi = a$ gemäß der Formel (vgl. Arbeit III)

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi_1}{1+a\,y}\int_{-1/\xi}^{y}\frac{(1+a\,y)\left\{\varphi_1'' + \varphi_1'\left[-(E+1)\,\dfrac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1} + \dfrac{a}{1+a\,y}\right]\right\}}{\varphi_1^2}\,dy\,. \tag{23}$$

Damit ist erst einmal der erste Schritt abgeschlossen.

Die für den zweiten Schritt benötigten Funktionen $(\partial\varphi/\partial\xi)_{\xi=a}$ bzw. $(\partial\chi/\partial\xi)_{\xi=a}$, bezeichnet mit Φ_1 bzw. X_1, berechnen wir dann (vgl. Arbeit III) aus den expliziten Formeln

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_1'' + \varphi_1' \left[2\,(\varphi_1 y - \varphi_1) - (E+1)\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1} + \frac{a}{1+a\,y} \right]}{2\,a\,\varphi_1} \tag{24}$$

und

$$X_1 = \frac{\chi_1'' + \chi_1' \left[\frac{2}{E}\,(\varphi_1 y - \varphi_1) - 2\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1} + \frac{a}{1+a\,y} \right]}{(2/E)\,a\,\varphi_1}\,. \tag{25}$$

Hierbei ist nach (22)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_0' + a\,\Phi_0', & \varphi_1'' &= \varphi_0'' + a\,\Phi_0'', \\ \chi_1' &= \chi_0' + a\,X_0', & \chi_1'' &= \chi_0'' + a\,X_0''. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Man bemerkt, daß in den Formeln (23) bis (25) für $y \to \infty$ nicht nur die Zähler, sondern auch, im Gegensatz zu dem Fall bewegter Außenluft, die Nenner Null werden. Das erklärt schon, warum der Fall ruhender Außenluft eine besonders große Rechengenauigkeit erfordert.

Die berechneten Verteilungen Φ_1, X_1 haben wir in Abb. 4 dargestellt. Im Zusammenhang mit der obigen Bemerkung muß dabei auf Folgendes hingewiesen werden: Die Rechnungen ergaben nur für den in Abb. 4 wiedergegebenen y-Bereich einen normalen Verlauf der Verteilungen; für größere positive y-Werte — untere Grenze derselben in Abb. 4 gestrichelt markiert — ergab die Rechnung einen sehr unregelmäßigen (und hier nicht dargestellten) Verlauf der Kurven. Es zeigte sich damit, daß für diese größeren Werte von y die von uns mit Tischrechenmaschinen erzielte Rechengenauigkeit nicht ausreichend war, um die in den Formeln (23) bis (25) für $y \to \infty$ auftretende Stelle der Unbestimmtheit zu bewältigen. Doch betrifft dieser von uns derart nicht erfaßte Bereich praktisch nur die äußeren Grenzen des Mischungsfeldes.

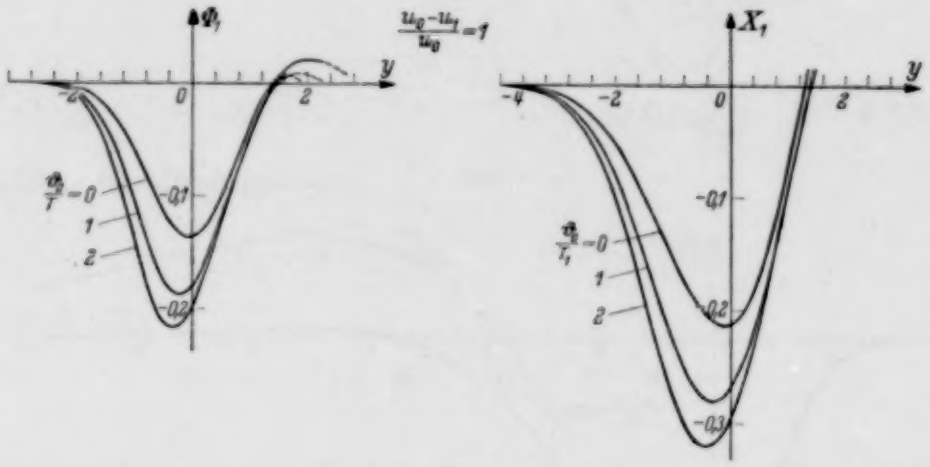


Abb. 4.

Mit den so erhaltenen Funktionen Φ_1 und X_1 können wir dann den zweiten Fortsetzungsschritt durchführen und erhalten mit der Schrittweite b approximativ die Profile

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + b\,\Phi_1 = \varphi_0 + a\,\Phi_0 + b\,\Phi_1, \\ \chi_2 &= \chi_1 + b\,X_1 = \chi_0 + a\,X_0 + b\,X_1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die Schrittweite b wurde zur Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes bis zum Kernende, das die Grenze der Anwendbarkeit von (5) und damit unseres Gleichungssystems bezeichnet, in den Grenzen 0,15 bis 0,50 variiert (Tabelle 1). Wir gelangen dabei z. T. etwas über das Kernende hinaus, doch ist für die hier vorgenommene geringe Überschreitung des Kernendes (Isotache 0,95) der Fehler als gering anzusehen.

Der Abfall der Geschwindigkeit innerhalb der angezeigten Grenze ergibt sich dabei in folgender Weise: Trägt man die Kurven $\varphi_2(y)$ für die jeweilige Schrittweite b über y auf, so wird ihr Existenzbereich zu negativen y hin durch die Koordinate $y = -1/\xi$ der Strahlachse begrenzt. Hat man mit einem Schritt b das Kernende überschritten, so hat $\varphi_2(y)$ an der Stelle $y = -1/\xi$ einen Wert kleiner als Eins. Außerdem ist aus Gründen der Symmetrie zu verlangen, daß $\varphi_2(y)$ an der Stelle

$y = -1/\xi$ die Tangente Null hat. Daraus ergibt sich die Konstruktion des Abfalls der Geschwindigkeit längs der Strahlachse (Abb. 5). Entsprechend ergibt sich innerhalb der angegebenen Grenze ($\chi = 0{,}95$) der Abfall der Temperatur längs der Strahlachse.

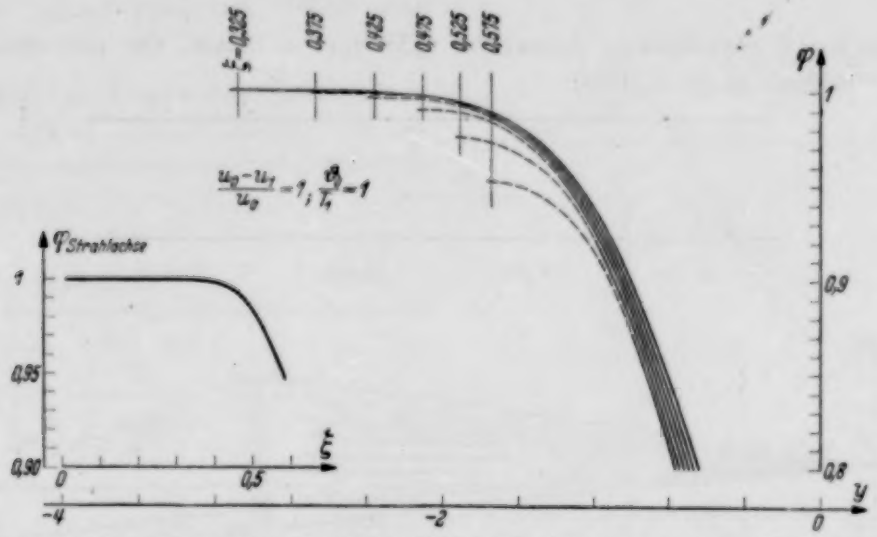


Abb. 5. Konstruktion des Abfalls der Geschwindigkeit längs Strahlachse.

4. Feld der Isotachen und Isothermen im Kernbereich[1]. Wir beschreiben das Mischungsfeld im Kernbereich mittels des Verlaufs der Isotachen und Isothermen: r/r_0 über x/r_0 für $\varphi = \text{konst.}$ bzw. $\chi = \text{konst.}$ Die effektiv vorhandenen Geschwindigkeiten und Temperaturen ergeben sich zu

$$u = u_0 \varphi\,, \qquad T = (T_0 - T_1)\,\chi + T_1\,.$$

Tabelle 1. *Isotachen.*

$\xi = (1/\sigma)\,(x/r_0)$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 1$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\varphi = 0{,}05$	1	1,55	1,91	2,14	1	1,55	1,87	2,12	1	1,54	1,81	2,09
0,1	1	1,41	1,72	1,93	1	1,39	1,63	1,83	1	1,38	1,57	1,76
0,3	1	1,19	1,34	1,43	1	1,16	1,24	1,30	1	1,13	1,18	1,23
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	1,08	1,13	1,15	1	1,04	1,04	1,03	1	1,01	1,00	0,98
0,7	1	0,99	0,95	0,92	1	0,94	0,88	0,82	1	0,92	0,86	0,79
0,9	1	0,85	0,72	0,62	1	0,81	0,67	0,56	1	0,79	0,67	0,54
0,95	1	0,80	0,62	0,49	1	0,76	0,59	0,44	1	0,74	0,59	0,43
0,99	1	0,69	0,43	0,20	1	0,65	0,42	0,22	1	0,64	0,45	0,19
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,69				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,58				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,56			
0,99	0,52				0,47				0,43			

Isothermen.

$\xi = (1/\sigma)\,(x/r_0)$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 1$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\chi = 0{,}05$	1	2,10	2,42	2,76	1	2,17	2,57	3,01	1	2,25	—	—
0,1	1	1,74	2,30	2,66	1	1,72	2,34	2,81	1	1,70	2,29	2,89
0,3	1	1,31	1,56	1,76	1	1,24	1,38	1,48	1	1,20	1,29	1,35
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	1,12	1,17	1,19	1	1,05	1,04	1,01	1	1,02	0,99	0,94
0,7	1	0,97	0,90	0,84	1	0,91	0,81	0,71	1	0,88	0,78	0,67
0,9	1	0,78	0,57	0,42	1	0,74	0,53	0,34	1	0,71	0,55	0,36
0,95	1	0,70	0,43	0,22	1	0,66	0,40	0,16	1	0,64	0,44	0,21
0,99	1	0,55	0,15	—	1	0,51	0,12	—	1	0,51	0,24	—
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,50				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,44				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi =$ 0,44			
0,99	0,38				0,34				0,34			

[1] Die Durchführung der langwierigen und schwierigen Rechnungen verdanke ich meiner Mitarbeiterin Frau *Lilli Schulze.*

Nach der in Abschn. 2 gegebenen Definition der Koordinaten $y = (r/r_0 - 1)/\xi$, $\xi = (1/\sigma)\,(x/r_0)$ haben wir

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \xi\, y\,, \qquad \frac{x}{r_0} = \sigma\,\xi\,; \tag{28}$$

gemäß der in Abschn. 2 getroffenen Annahme (13) $\sigma(x) = \text{konst.}$ für das einzelne Modell entnehmen wir σ der Arbeit II ($\sigma = \sigma(0)$):

$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 1$			
ϑ_0/T_1	0	1	2
σ	16,94	16,00	15,67

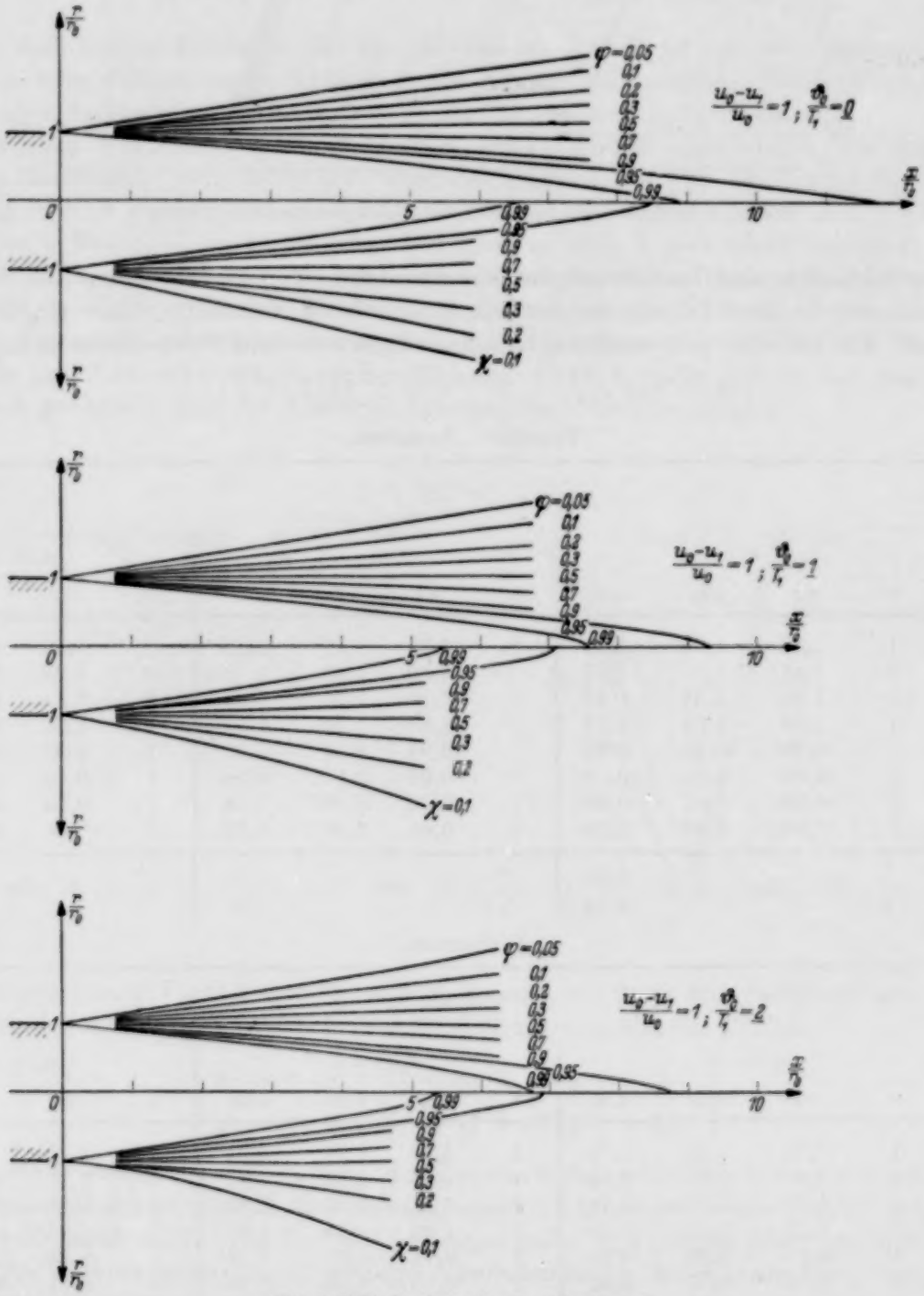


Abb. 6. Feld der Isotachen und Isothermen.

Tabelle 1 enthält das Ergebnis unserer Rechnung. In Abb. 6 sind die erhaltenen Isotachen- und Isothermenfelder für den Kernbereich dargestellt. Es ergibt sich, wie in Arbeit III, als Temperatureffekt eine longitudinale und laterale Verkürzung des Mischungsfeldes; diese Verkürzung entspricht der aus Arbeit II folgenden Drehung des Winkelraumes der Mischung, mit Scheitel in

der Düsenkante, zur Strahlachse hin. Weiterhin ist, wie in Arbeit III, ersichtlich, daß das Temperaturfeld, bedingt durch den sich aus dem Experiment ergebenden Wert $E = 2$ für das Übertragungsverhältnis [vgl. (4)], eine wesentlich andere Struktur als das Geschwindigkeitsfeld aufweist, wie sich in seiner größeren Breite und geringeren Tiefe zeigt.

Tabelle 2 enthält die Werte der Querkomponente $\psi = \sigma v/u_0$, die in Abb. 7 dargestellt ist. Für die effektive Querkomponente der Geschwindigkeit folgt $v = u_0 \psi/\sigma$.

Tabelle 2.

y	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 1$		
	$\vartheta_0/T_1 = 0$	$\vartheta_0/T_1 = 1$	$\vartheta_0/T_1 = 2$
	$10\,\psi_1$	$10\,\psi_1$	$10\,\psi_1$
—2,4	0,01	0,01	0,02
—2	0,04	0,07	0,09
—1,6	0,15	0,27	0,36
—1,2	0,45	0,76	0,99
—0,8	0,97	1,55	1,93
—0,4	1,54	2,29	2,75
0	1,78	2,55	3,00
0,4	1,43	2,19	2,63
0,8	+0,56	1,40	1,88
1,2	—0,55	+0,46	1,02
1,6	—1,62	—0,41	+0,21
2,0	—2,49	—1,14	—0,47
2,4	—3,11	—1,69	—1,00
2,8	—3,50	—2,07	—1,39
3,2	—3,71	—2,32	—1,67
3,6	—3,79	—2,47	—1,85
4,0	—3,79	—2,53	—1,97
4,4	—3,75	—2,55	—2,03
4,8	—3,70	—2,54	—2,05
5,2	—3,66	—2,50	—2,04
5,6	—3,63	—2,46	—

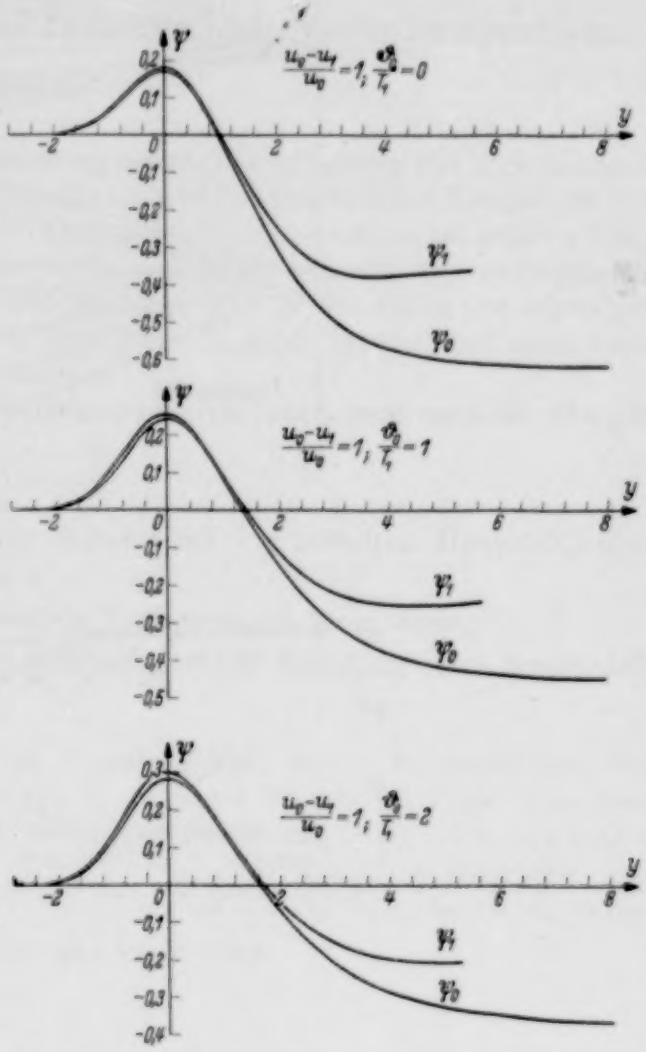


Abb. 7.

5. Vergleich mit Messungen. Zum Vergleich mit der Theorie haben wir einige neuere amerikanische Messungen herangezogen.

S. Corrsin[1] hat das Mischungsfeld eines Düsenstrahls, der die kleine positive Temperaturdifferenz von ungefähr 13° C ($\vartheta_0/T_1 \approx 0$) gegenüber der umgebenden Luft aufwies, gemessen. In Abb. 8 haben wir Experiment und Theorie für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld des Kernbereichs dargestellt. Für das Geschwindigkeitsfeld ist die Übereinstimmung als gut zu bezeichnen. Auch für das Temperaturfeld ist die Übereinstimmung als befriedigend anzusehen bis auf den äußeren Teil, wo die äußeren Isothermen weiter nach außen greifen. Dennoch ist die von der Theorie angezeigte verschiedene Struktur der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder — größere Breite und geringere Tiefe des Temperaturfeldes — gut erkennbar.

Auch die von *S. Corrsin* und *M. Uberoi*[2] durchgeführten Messungen an Heißluftstrahlen mit Übertemperaturen von 15° und 296° C ($\vartheta_0/T_1 \approx 0$ und 1) zeigen die geringere Tiefe des Temperaturfeldes gegenüber dem Geschwindigkeitsfeld; insbesondere erweisen die Messungen auch den von der Theorie angesagten Temperatureffekt der longitudinalen Verkürzung des Mischungsfeldes (sowohl für das Geschwindigkeits- wie das Temperaturfeld) mit wachsender Temperaturdifferenz. Das zeigen in guter quantitativer Übereinstimmung mit der Theorie die Messungen längs der Strahlachse (Abb. 9). Über das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld in seiner Gesamtheit wurden für den Kernbereich in der Messung leider keine Angaben gemacht.

[1] *S. Corrsin*, NACA-Wartime Rep. W-94 (1946).
[2] *S. Corrsin* and *M. S. Uberoi*, NACA Rep. 998 (1950).

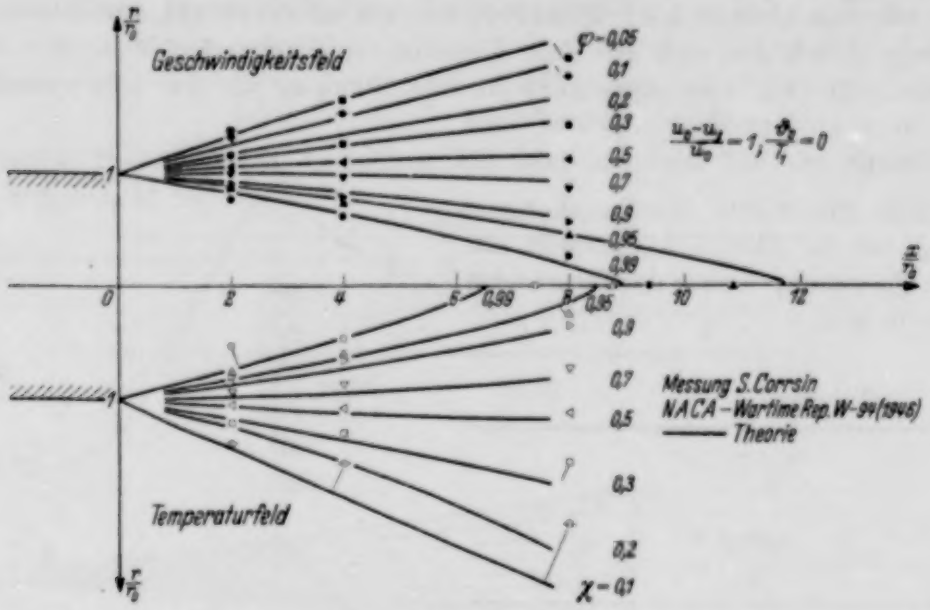


Abb. 8.

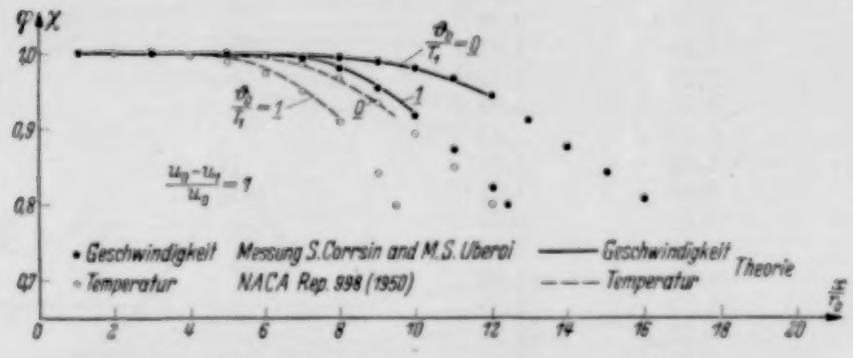


Abb. 9. Geschwindigkeit und Temperatur längs Strahlachse.

6. Zusammenfassung. Es werden die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder der turbulenten Ausbreitung von Heißluftstrahlen in ruhender Außenluft für den Kernbereich des Düsenstrahls berechnet. Grundlage der Rechnung bildet das vom Verf. in einer vorangehenden Arbeit (Ing.-Arch. 20) aufgestellte Gleichungssystem, das mittels eines Fortsetzungsverfahrens gelöst wird. Der Vergleich mit der Messung ergibt gute Übereinstimmung.

(Eingegangen am 21. März 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Mohrenstr. 39.

Der schlanke Stab unter konservativer Belastung als Variationsproblem

Von H. Leipholz

1. Einleitung. In früheren Arbeiten[1, 2] ist die Knickung sowohl des spannungsfrei verwundenen Stabes als auch der tordierten Welle, beide mit Einzelkraft und kontinuierlicher Längskraft belastet, behandelt worden. Im ersten Fall, für den Stab, waren zwei verschiedene, im zweiten Fall, für die Welle, zwei gleiche Hauptträgheitsmomente vorausgesetzt worden. In der vorliegenden Arbeit sollen alle Einschränkungen fortfallen, so daß für Stab oder Welle, außer der schon genannten Druckbelastung, sowohl spannungsfreie Verwindung als auch Torsion und noch zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente zugelassen werden.

Dieses verallgemeinerte Problem läßt sich als Variationsproblem lösen, wenn man die übrigen Voraussetzungen beibehält, nämlich

1. die Stabachse sei ursprünglich gerade,

2. die für die Stabquerschnitte bezüglich ihrer Schwerpunkte ermittelten Hauptträgheitsmomente seien über die Länge des Stabes konstant,

3. die unter der Belastung auftretenden elastischen Verformungen seien klein,

4. die Lagerung der Stabenden und die auf den Stab einwirkende Belastung seien derart, daß das ganze Problem konservativ wird.

2. Die Differentialgleichung. Es sei ein Stab zu Grunde gelegt, dessen Beanspruchung im allgemeinsten Fall aus einem axialen Torsionsmoment T, aus einer Einzelkraft P und aus einer kontinuierlichen Längskraft q besteht. An den Stabenden greifen T und P an; q ist nach einem vorgeschriebenen Gesetz $q(s)$ über die Stabachse verteilt, wobei s die Länge der Stabachse vom unteren Stabende an gezählt ist, und P und q sind richtungstreue Druckkräfte, die die Richtung der unverformten Stabachse beibehalten (Abb. 1).

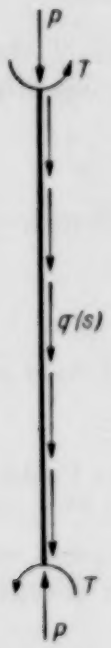


Abb. 1.

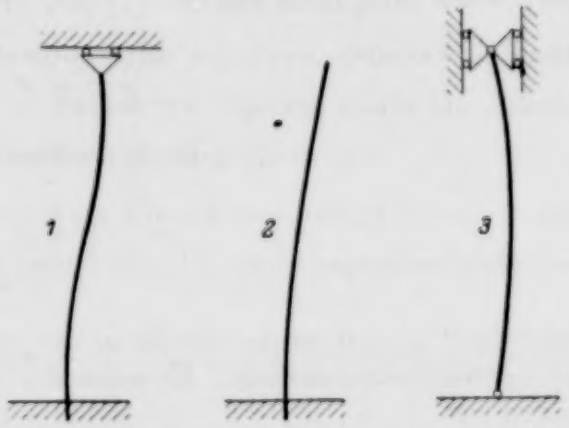


Abb. 2.

Ferner sei der Stab gemäß Fall *1* von Abb. 2 gelagert; nur wenn im besonderen das Torsionsmoment T entfällt und lediglich die Druckkräfte P und q wirken, können auch die Lagerfälle *2* und *3* berücksichtigt werden.

[1] *H. Leipholz*, Ing.-Arch. 29 (1960) S. 262 (künftig zitiert mit I.).
[2] *H. Leipholz*, Ing.-Arch. 30 (1961) S. 42 (künftig zitiert mit II.).

Bei diesen Bedingungen für Belastung und Stablagerung ist das Problem nicht nur konservativ, sondern auch homogen, weil an den Stabenden keine Querkräfte auftreten oder diese zumindest von höherer Ordnung klein sind.

Wegen des konservativen Charakters können zur Ableitung der Differentialgleichungen die Gleichgewichtsbedingungen der Elastostatik auf ein herausgeschnittenes Stabelement angewendet werden.

Als Bezugssystem sei das Hauptachsensystem[1] (ξ, η, ζ) des Stabes verwendet, das die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ hat, wenn man mit der Geschwindigkeit Eins an der Stabachse entlang geht. Dann führen die Gleichungen von *Kirchhoff* und *Clebsch* nach einigen Umformungen, wie sie ganz entsprechend in der Arbeit I durchgeführt worden sind, auf die Differentialgleichungen des verallgemeinerten Problems

$$\left.\begin{aligned} a\,\ddot{e}_\eta + [(a+b)(\varepsilon+\tau_0) - c\,\varepsilon]\,\dot{e}_\xi + [-b(\varepsilon+\tau_0)^2 + \varepsilon(\varepsilon+\tau_0)\,c + P + Q(s)]\,e_\eta = 0\,, \\ b\,\ddot{e}_\xi - [(a+b)(\varepsilon+\tau_0) - c\,\varepsilon]\,\dot{e}_\eta + [-a(\varepsilon+\tau_0)^2 + \varepsilon(\varepsilon+\tau_0)\,c + P + Q(s)]\,e_\xi = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hier sind e_ξ und e_η die Komponenten eines Einheitsvektors $\mathfrak{e}$ in der ursprünglichen Stabachse; die übrigen Bezeichnungen in (1) werden alsbald noch genauer erklärt werden.

Man muß bei jenen Umformungen nur beachten, daß man jetzt nicht nur den Vektor der elastischen Deformation $\mathfrak{u}$ zu berücksichtigen hat, sondern daß auch noch die Vorverwindung des Stabes mit $\mathfrak{v} = \tau_0\,\mathfrak{e}_\zeta$ zugelassen ist. Dabei ist τ_0 die Verwindung der Längeneinheit der unbelasteten Stabachse und $\mathfrak{e}_\zeta$ der Einheitsvektor in der ζ-Achse. Deshalb besteht zwischen den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, weil die Auslenkung der Achse des belasteten Stabes von der Lotrechten klein sein soll, die Beziehung

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ \tau_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Es sind, wie früher, w_ξ, w_η, τ_ζ die Komponenten von $\mathfrak{w}$, ferner ω_ξ und ω_η die Krümmungen der Achse des deformierten Stabes und ε die zusätzliche Torsion der Längeneinheit des Stabes infolge T.

Außerdem war für die Umformungen das Gleichungssystem

$$M_\xi = a\,\omega_\xi\,, \qquad M_\eta = b\,\omega_\eta\,, \qquad T_\zeta = c\,\varepsilon \quad (3)$$

zu benutzen. Hierbei sind M_ξ, M_η die Komponenten des Biegemomentes, T_ζ das Torsionsmoment, a und b die konstanten Biegesteifigkeiten und c die konstante Torsionssteifigkeit des Stabes.

Zu den Gleichungen (1) ist noch zu bemerken:

1. $Q(s)$ ist eine Abkürzung für $\int_s^l q(s)\,ds$,

2. die unabhängige Variable, nach der differentiiert wird, ist s.

Ferner ist wieder, wie schon gezeigt[2] worden ist,

$$c\,\tau_\zeta = T_\zeta = \text{konst.} \qquad \text{also} \qquad T_\zeta \equiv T$$

und daher, wegen $\tau_\zeta = \varepsilon + \tau_0$ und $c = \text{konst.}$, auch $\varepsilon + \tau_0 = \text{konst.}$

In dem Differentialgleichungssystem (1) sind einige bereits bekannte Probleme als Sonderfälle enthalten:

1. $P = 0$, $Q(s) = 0$, $\tau_0 = 0$ ist das Problem der tordierten Welle, das sowohl für den Fall $a = b$ (gleiche Hauptträgheitsmomente), als auch $a \neq b$ (verschiedene Hauptträgheitsmomente) schon gelöst worden ist[3].

2. $Q(s) = 0$ ist das Problem der tordierten und gleichzeitig gedrückten Welle (durch Einzelkraft P an den Stabenden), das eingehend von *H. Ziegler*[4], *A. Trösch*[5], *M. Beck*[6] entweder für

[1] *H. Leipholz*, I., S. 263.
[2] *H. Leipholz*, II., S. 45
[3] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 262.
[4] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2 (1951) S. 265 und 3 (1952) S. 96; Schweizer Bauzeitung 66 (1948) S. 463.
[5] *A. Trösch*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 258.
[6] *M. Beck*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 231.

$a = b$ (gleiche Hauptträgheitsmomente) oder auch für $a \neq b$ (verschiedene Hauptträgheitsmomente) dargestellt worden ist. Dabei haben die Autoren noch von den beiden Möglichkeiten $\tau_0 = 0$ oder $\tau_0 \neq 0$ Gebrauch gemacht.

3. $Q(s) = 0$, $\varepsilon = 0$ ist das Problem der „Knickung verwundener Stäbe unter Druck", wie es durch die Arbeiten von *H. Ziegler*[1] und *E. Hui*[2] bekannt geworden ist.

4. $\varepsilon = 0$ ist das Problem der Knickung verwundener Stäbe unter dem Druck einer konservativen, kontinuierlich und gleichmäßig verteilten Belastung, das ich schon früher[3] behandelt habe.

5. $a = b$, $\tau_0 = 0$ ist das Problem der tordierten und gleichzeitig gedrückten Welle mit gleichen Hauptträgheitsmomenten, wobei die auf die Welle wirkenden Druckkräfte aus der Einzelkraft P und aus der richtungstreuen Längskraft $q(s)$ bestehen; auch dieses Problem ist von mir[4] behandelt worden.

Man ersieht daraus, daß (1) das Problem der tordierten und gedrückten Welle (unter den bereits genannten Voraussetzungen) in sehr allgemeiner Form darstellt. Eine Lösung von (1) dürfte daher wertvoll sein, da sie die Lösungen aller Sonderfälle einschließen würde. Lösungsmöglichkeiten sind durch Reihenansatz oder durch Verwendung der Differenzenmethode gegeben. Das wurde von mir bereits in einer anderen Arbeit[5] angedeutet. In der jetzigen Arbeit soll gezeigt werden, daß man die Lösung auch über ein Variationsproblem erhalten kann.

3. Das Variationsproblem. Es werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{a}\left[(a+b)(\varepsilon+\tau_0) - c\,\varepsilon\right], & \beta &= \frac{1}{a}\left[-b(\varepsilon+\tau_0)^2 + c\,\varepsilon(\varepsilon+\tau_0)\right], \\ \gamma &= \frac{1}{b}\left[(a+b)(\varepsilon+\tau_0) - c\,\varepsilon)\right], & \delta &= \frac{1}{b}\left[-a(\varepsilon+\tau_0)^2 + c\,\varepsilon(\varepsilon+\tau_0)\right], \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$u = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,. \tag{5}$$

Man erkennt leicht, daß

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{b}} \tag{6}$$

ist. Aus (6) ergibt sich

$$\alpha\sqrt{\frac{a}{b}} = \gamma\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{7}$$

und hieraus, wenn man für die linke Seite von (7) die Abkürzung (5) verwendet,

$$u = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,. \tag{8}$$

Jetzt wird noch eine Variablentransformation durchgeführt:

$$e_\xi = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\bar{e}_\xi\,. \tag{9}$$

Mit (4) und (9) läßt sich (1) umschreiben zu

$$\ddot{e}_\eta + \sqrt{\frac{a}{b}}\,\alpha\,\dot{\bar{e}}_\xi + \left(\beta + \frac{P+Q(s)}{a}\right)e_\eta = 0\,, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}\,\ddot{\bar{e}}_\xi - \gamma\,\dot{e}_\eta + \left(\delta + \frac{P+Q(s)}{b}\right)\sqrt{\frac{a}{b}}\,\bar{e}_\xi = 0\,. \tag{10}$$

Aus (10) erhält man mit (5), (8) und durch Ergänzung mit $\pm u^2 e_\eta$ in der oberen Zeile und mit $\pm u^2 \bar{e}_\xi$ in der unteren Zeile

$$\ddot{e}_\eta + 2u\,\dot{\bar{e}}_\xi - u^2 e_\eta = \sigma(s)\,e_\eta\,, \qquad \ddot{\bar{e}}_\xi - 2u\,\dot{e}_\eta - u^2\bar{e}_\xi = \psi(s)\,\bar{e}_\xi\,, \tag{11}$$

---

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 106.
[2] *E. Hui*, Österr. Ing.-Arch. 9 (1955) S. 288.
[3] *H. Leipholz*, I.
[4] *H. Leipholz*, II.
[5] *H. Leipholz*, I.

wobei noch die neuen Abkürzungen

$$\sigma(s) = -\left(u^2 + \beta + \frac{P + Q(s)}{a}\right), \qquad \psi(s) = -\left(u^2 + \delta + \frac{P + Q(s)}{b}\right) \tag{12}$$

benutzt worden sind.

Das Differentialgleichungssystem ist in der Form (11) besonders geeignet, den weiteren Gang der Rechnung erkennen zu lassen. Zu diesem Zweck wird eine Analogiebetrachtung durchgeführt. Die Gleichungen (11) lassen sich nämlich auffassen als die Bewegungsgleichungen eines Punktes, dargestellt in einem rotierenden Bezugssystem, wenn man nur die unabhängige Variable s, nach der differentiert wird, als „Zeit" deutet.

Ist $\bar{e}_\xi$, e_η das gleichförmig mit der Drehgeschwindigkeit u rotierende orthogonale Achsenkreuz, so läßt sich auf Grund dieser Auffassung die Beziehung mit einem raumfesten orthogonalen Achsenkreuz (x, y) vermöge

$$x = \bar{e}_\xi \cos u\,s - e_\eta \sin u\,s\,, \qquad y = \bar{e}_\xi \sin u\,s + e_\eta \cos u\,s \tag{13}$$

und

$$\bar{e}_\xi = x \cos u\,s + y \sin u\,s\,, \qquad e_\eta = y \cos u\,s - x \sin u\,s \tag{14}$$

herstellen.

Das System (11) ließe sich formal, unter Verwendung der Transformationsformeln (14), in ein System für die neuen Variablen x und y umschreiben. Viel schneller und eleganter kommt man aber dazu, wenn man den Gedanken der kinetischen Analogie weiter verfolgt.

Im Sinne der Kinetik müssen die Bewegungsgleichungen im raumfesten (x, y)-System lauten:

$$\ddot{x} = K_x\,, \quad \ddot{y} = K_y\,. \tag{15}$$

Man hat jetzt nur die Aufgabe, die „Kraftkomponenten" K_x und K_y aus den bekannten „Kraftkomponenten"

$$K_{\bar{\xi}} = \psi(s)\,\bar{e}_\xi\,, \qquad K_\eta = \sigma(s)\,e_\eta\,, \tag{16}$$

die man aus (11) abliest, zu errechnen. Das geschieht bekanntlich durch

$$K_x = K_{\bar{\xi}} \frac{\partial \bar{e}_\xi}{\partial x} + K_\eta \frac{\partial e_\eta}{\partial x}, \qquad K_y = K_{\bar{\xi}} \frac{\partial \bar{e}_\xi}{\partial y} + K_\eta \frac{\partial e_\eta}{\partial y}\,. \tag{17}$$

Führt man die Rechnung gemäß (17) unter Verwendung von (14) durch, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \psi(s)\,(x \cos^2 u\,s + y \sin u\,s \cos u\,s) - \sigma(s)\,(y \sin u\,s \cos u\,s - x \sin^2 u\,s)\,, \\ K_y &= \psi(s)\,(x \sin u\,s \cos u\,s + y \sin^2 u\,s) + \sigma(s)\,(y \cos^2 u\,s - x \sin u\,s \cos u\,s)\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Durch Verbindung von (15) und (18) kann man das Ziel erreichen, das Differentialgleichungssystem (11) in den neuen Variablen x und y zu schreiben. Führt man noch trigonometrische Umformungen durch, so lauten sie

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= x\frac{\psi + \sigma}{2} + x\frac{\psi - \sigma}{2}\cos 2\,u\,s + y\frac{\psi - \sigma}{2}\sin 2\,u\,s\,, \\ \ddot{y} &= y\frac{\psi + \sigma}{2} - y\frac{\psi - \sigma}{2}\cos 2\,u\,s + x\frac{\psi - \sigma}{2}\sin 2\,u\,s\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Ebenfalls durch die kinetische Analogie wird man zu den Begriffen

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,, \quad U = -\frac{1}{2}[\psi(s)\,(x \cos u\,s + y \sin u\,s)^2 + \sigma(s)\,(y \cos u\,s - x \sin u\,s)^2] \tag{20}$$

geführt, die für den bewegten Punkt die kinetische und die potentielle Energie bedeuten. Man sieht, daß tatsächlich

$$\left.\begin{aligned} K_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}\,, & \ddot{x} &= \frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,, \\ & \text{und} & & \\ K_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}\,, & \ddot{y} &= \frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ist, so daß man für (15) schreiben kann

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial y}\,. \tag{22}$$

Da aber T von x und y und U von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ frei ist, so kann man nach Einführung der Funktion

$$La = T - U \qquad \text{oder} \qquad La = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \psi(s)\,\bar{e}_\xi^2 + \sigma(s)\,e_\eta^2) \tag{23}$$

(*Lagrange*sche Funktion im Sinne der Kinetik) das Differentialgleichungssystem (15) in

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial La}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial La}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial La}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial La}{\partial y} = 0 \tag{24}$$

umwandeln. Dabei sind die Größen $\bar{e}_\xi$ und e_η, die in (23) vorkommen, als Abkürzungen für Beziehungen zwischen x, y und u gemäß (14) aufzufassen.

Mit (24) ist man aber zum Ziel gekommen. Denn es sind dies ja die *Euler*schen Differentialgleichungen eines Variationsproblems:

$$\int_0^l La = ds = \text{Extr.} \qquad \text{oder also} \qquad \int_0^l (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \psi(s)\,\bar{e}_\xi^2 + \sigma(s)\,e_\eta^2)\,ds = \text{Extr.}\,. \tag{25}$$

Jetzt ist man zur Behandlung des Problems der gedrückten und tordierten Welle, das durch das System (1) in der allgemeinsten Form gegeben war, nicht mehr auf die sicher recht schwierige Auflösung des Differentialgleichungssystems angewiesen, sondern kann das Variationsproblem mit einer der direkten Methoden, z. B. mit dem *Ritz*schen Verfahren, lösen.

4. Die Randbedingungen. Zu beachten ist noch, daß man bei der Durchführung des Ritzschen Verfahrens für die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ Näherungsfunktionen verwenden muß, die die Randbedingungen des Problems erfüllen. Man muß also auch noch diese Randbedingungen kennen. Sie sind für die Variablen e_ξ und e_η gegeben und lauten bei den angenommenen Lagerfällen *1*, *2* und *3* von Abb. 2

$$e_\xi = 0\,, \qquad e_\eta = 0 \tag{26}$$

für eingespannte Stabenden und

$$\dot{e}_\xi - \dot{e}_\eta\,(\varepsilon + \tau_0) = 0\,, \qquad e_\eta = e_\xi\,(\varepsilon + \tau_0) = 0 \tag{27}$$

für Stabenden, die von Biegemomenten frei sind.

Durch die Beziehungen (9) und (13) findet man aus (26) und (27) leicht die entsprechenden Randbedingungen, die für die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ gelten müssen.

5. Ein Sonderfall. Einer besonderen Betrachtung soll der Sonderfall

$$a = b\,, \qquad \tau_0 = 0 \tag{28}$$

unterzogen werden. Es ist dies die tordierte und gedrückte Welle ohne Vorverwindung, etwa mit kreisrundem oder quadratischem Querschnitt, wie sie von mir[1] behandelt worden ist. Für diesen Fall wird wegen $a = b$

$$\psi(s) = \sigma(s) = V(s) = -\left[\left(\frac{c\,\varepsilon}{2\,a}\right)^2 + \frac{P + Q(s)}{a}\right] \tag{29}$$

oder weil $c\,\varepsilon = T$ ist,

$$\psi(s) = \sigma(s) = V(s) = -\left[\left(\frac{T}{2\,a}\right)^2 + \frac{P + Q(s)}{a}\right]. \tag{30}$$

Zunächst einmal gibt das, wie man mit $\psi = \sigma = V$ aus (18) abliest,

$$K_x = V(s)\,x\,, \qquad K_y = V(s)\,y\,. \tag{31}$$

Führt man nun die komplexen Größen

$$r = x + i\,y\,, \qquad \varrho = \bar{e}_\xi + i\,e_\eta \tag{32}$$

ein, so wird aus den Differentialgleichungen (15)

$$\ddot{r} = V(s)\,r\,. \tag{33}$$

In diesem Sonderfall ist also alles auf die Lösung dieser einen Differentialgleichung (33) zurückgeführt, die deshalb Basisgleichung heißen soll.

[1] *H. Leipholz*, II.

Kennt man die Lösungen $r(s)$ von (33), so kann man die Lösungen $\bar{e}_\xi$ und e_η sofort angeben. Denn setzt man in $\varrho = \bar{e}_\xi + i\, e_\eta$ die Beziehungen (14) ein, so läßt sich schreiben

$$\varrho(s) = r(s)\, e^{-i\omega s}, \tag{34}$$

und damit kann man auch die allgemeine Lösung des Problems und seine Eigenwerte ermitteln. In diesem Sonderfall ist also eine Integration der Differentialgleichungen möglich.

Will man für diesen Sonderfall das Variationsproblem lösen, so erhält man aus (20), unter Beachtung von (30), zunächst

$$U = -\frac{1}{2} V(s)\,(x^2 + y^2) \tag{35}$$

und damit aus (23)

$$La = \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + V(s)\,(x^2 + y^2)\right]. \tag{36}$$

Das Variationsproblem lautet dann für die spezielle Annahme

$$q(s) = \text{konst. und also } Q(s) = \int_s^l q(s)\, ds = q\,(l - s)$$

$$\int_0^l \left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left[\frac{q\,s}{a} - \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2 - \frac{P + q\,l}{a}\right](x^2 + y^2)\right\} ds = \text{Extr}\,. \tag{37}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung seien die Abkürzungen

$$\lambda = \frac{q\,l}{a}, \qquad K = \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2 + \frac{P}{a}$$

eingeführt, womit

$$\int_0^l \left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^3 + \left[\lambda\frac{s}{l} - (K - \lambda)\right](x^2 + y^2)\right\} ds = \text{Extr.} \tag{38}$$

folgt.

Will man insbesondere den Lagerfall *1* von Abb. 2 zugrunde legen, so hat man wegen zweier eingespannter Stabenden die Randbedingungen

$$e_\xi = 0, \quad e_\eta = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{und} \quad s = l. \tag{39}$$

Das gibt wegen (9) und (13) für x und y die Randbedingungen

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{und} \quad s = l. \tag{40}$$

Diese Randbedingungen werden von den Näherungsfunktionen

$$x = a_1 \sin\frac{\pi}{l} s, \qquad y = a_2 \sin\frac{\pi}{l} s \tag{41}$$

erfüllt. In diesen Näherungsfunktionen sind a_1 und a_2 unbestimmte Koeffizienten.

Mit (41) wird aus (38)

$$(a_1^2 + a_2^2)\left[\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi}{l} s\, ds - (K + \lambda)\int_0^l \sin^2\frac{\pi}{l} s\, ds + \frac{\lambda}{l}\int_0^l s \sin^2\frac{\pi}{l} s\, ds\right] = \text{Extr.}. \tag{42}$$

Die Ausrechnung der Integrale führt auf die Bedingung

$$J(a_1, a_2) \equiv (a_1^2 + a_2^2)\left[\frac{\pi^2}{2\,l} - \frac{(K + \lambda)\,l}{2} + \frac{\lambda\,l}{4}\right] = \text{Extr.} \tag{43}$$

Das *Ritz*sche Verfahren schreibt aber vor:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0,$$

was die Eigenwertbedingung

$$\frac{\pi^2}{2\,l} - \frac{(K + \lambda)\,l}{2} + \frac{\lambda\,l}{4} = 0, \qquad l = \frac{2\,a}{q}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2 - \frac{P}{a}\right] \tag{44}$$

zur Folge hat.

Hierfür ein Zahlenbeispiel: In meiner zitierten Arbeit[1] waren folgende Zahlen gegeben:

$$T = 10^4\,\mathrm{kpm}\,, \qquad P = 10^3\,\mathrm{kp}\,, \qquad q = 60\,\mathrm{kp/m}\,, \qquad a = 10^5\,\mathrm{kpm^2}\,.$$

Geht man mit diesen Zahlen in (44) ein, so erhält man durch den zweiten Ausdruck eine Iterationsvorschrift für l. Damit Konvergenz eintritt, muß man allerdings ein Verfahren zur Konvergenzverbesserung anwenden, z. B. ein solches, wie es von *R. Zurmühl*[2] beschrieben worden ist.

Beginnt man die Rechnung mit $l_0 = 22$ m, so erhält man als $l_6 = 22{,}6$ m und dieser Wert stimmt mit dem von mir[3] gefundenen genauen Wert $l = 22{,}5$ m recht gut überein. Man hat also durch das Variationsproblem auf einfachste Weise in (44) eine sehr brauchbare Vorschrift zur Berechnung von Eigenwerten für den Sonderfall (28) und den Lagerfall *1* erhalten.

6. Ein Versuch zur Transformation auf „zyklische" Variable. Wendet man die Analogiebetrachtung bereits auf das System (11) an, so hat man entsprechend mit

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[\dot{\bar{e}}_\xi^2 + \dot{e}_\eta^2 + 2\,u\,(\bar{e}_\xi\,\dot{e}_\eta - \dot{\bar{e}}_\xi\,e_\eta) + u^2\,(\bar{e}_\xi^2 + e_\eta^2)\right], \\ U &= -\frac{1}{2}\left(\psi(s)\,\bar{e}_\xi^2 + \sigma(s)\,e_\eta^2\right), \\ La &= T - U = \frac{1}{2}\left[\dot{\bar{e}}_\xi^2 + \dot{e}_\eta^2 + 2\,u\,(\bar{e}_\xi\,\dot{e}_\eta - \dot{\bar{e}}_\xi\,e_\eta) - \left(\delta + \frac{P + Q(s)}{b}\,\bar{e}_\xi^2 - \left(\beta + \frac{P + Q(s)}{a}\right)e_\eta^2\right]\right. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

zu rechnen, wobei $T = T_0 + T_1 + T_2$ mit

$$T_0 = \frac{1}{2}\,u^2\,(\bar{e}_\xi^2 + e_\eta^2)\,, \qquad T_1 = u\,(\bar{e}_\xi\,\dot{e}_\eta - \dot{\bar{e}}_\xi\,e_\eta)\,, \qquad T_2 = \frac{1}{2}\,(\dot{\bar{e}}_\xi^2 + \dot{e}_\eta^2) \tag{46}$$

ist.

In Polarkoordinaten sei

$$\bar{e}_\xi = r(s)\cos\psi(s)\,, \qquad e_\eta = r(s)\sin\psi(s)\,. \tag{47}$$

Dann ergibt eine Umrechnung

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\,(u + \dot{\varphi})^2\right], \qquad U = -\frac{1}{2}\left[\psi(s)\,r^2\cos^2\varphi + \sigma(s)\,r^2\sin^2\varphi\right], \\ La &= \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\,(u + \dot{\varphi})^2 + \psi(s)\,r^2\cos^2\varphi + \sigma(s)\,r^2\sin^2\varphi\right], \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

was für (11) wieder die Darstellung

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial La}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial La}{\partial r} = 0\,, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial La}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial La}{\partial \varphi} = 0 \tag{49}$$

erlaubt [diesmal aber mit La gemäß (48)] und damit zu dem *V*ariationsproblem

$$\int_0^l \left[\dot{r}^2 + r^2\,(u + \dot{\varphi})^2 + \psi(s)\,r^2\cos^2\varphi + \sigma(s)\,r^2\sin^2\varphi\right] ds = \mathrm{Extr.}\,, \tag{50}$$

mit den Funktionen $r(s)$ und $\varphi(s)$, führt.

Im Sonderfall $a = b$ hat man $\sigma(s) = \psi(s) = V(s)$ und damit

$$La = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\,(u + \dot{\varphi})^2 + V(s)\,r^2\right]. \tag{51}$$

Da La nun von der Variablen φ frei ist, so ist φ eine „zyklische" Variable, und man kann eine Integration des Systems (49) durchführen. Wegen $\partial La/\partial\varphi = 0$ folgt

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial La}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{ds}\left[r^2 + (u + \dot{\varphi})\right] = 0\,, \qquad \frac{\partial La}{\partial \dot{\varphi}} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\,(u + \dot{\varphi}) = C\,. \tag{52}$$

Setzt man insbesondere die Konstante C auf der rechten Seite gleich Null, so hat man, da $r = 0$ trivial wäre,

$$\varphi = -\,u\,s\,. \tag{53}$$

---

[1] *H. Leipholz*, II.
[2] *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik, S. 25—27, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[3] *H. Leipholz*, II.

Verwendet man (52) mit der Annahme $C = 0$, um T gemäß (48) zu schreiben, so gibt das

$$T = \frac{\dot{r}^2}{2}. \tag{54}$$

In bekannter Weise wird nun mit Hilfe der *Routh*schen Funktion

$$R = T - \dot{\varphi}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\dot{r}^2}{2} \equiv T \tag{55}$$

die „Bewegungsgleichung" für die „nichtzyklische" Variable r als

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{56}$$

angesetzt. R ist durch (55) gegeben. Für U erhält man mit $\sigma = \psi = V$ aus (48)

$$U = -\frac{1}{2} V(s)\, r^2, \tag{57}$$

und so wird aus (56)

$$\ddot{r} = V(s)\, r, \tag{58}$$

was bereits als Basisgleichung (33) bekannt ist.

Setzt man wieder

$$\varrho = \bar{e}_\xi + i\, e_\eta,$$

so gibt das mittels (47)

$$\varrho = r\, e^{i\varphi}, \tag{59}$$

und da nach (53) φ bereits bekannt ist, wird wieder die Lösung für die eigentlichen Variablen $\bar{e}_\xi$ und e_η des Problems in komplexer Schreibweise durch

$$\varrho = r(s)\, e^{-ius} \tag{60}$$

gegeben, wofern man die Lösungen $r(s)$ der Basisgleichung (58) kennt. Das ist genau wie schon durch (34) beschrieben.

Damit ist gezeigt worden, daß für den Sonderfall $a = b$ die Auflösung der Differentialgleichungen (11) besonders einfach ist, weil dann eine der Variablen zyklisch wird.

Im allgemeinen Fall seien die „verallgemeinerten Koordinaten und Impulse"

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \bar{e}_\xi, & q_2 &= e_\eta, \\ p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{e}}_\xi} = \dot{\bar{e}}_\xi - u\, e_\eta, & p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\eta} = \dot{e}_\eta + u\, \bar{e}_\xi \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

eingeführt, und es sei in bekannter Weise die „*Hamilton*sche Funktion"

$$H = T_2 - T_0 + U \tag{62}$$

aufgestellt. Das gibt

$$H = \frac{1}{2}\left[(p_1 + u\, q_2)^2 + (p_2 - u\, q_1)^2 - \left(u^2 + \psi(s)\right) q_1^2 - \left(u^2 + \sigma(s)\right) q_2^2\right], \tag{63}$$

und hiermit erhält man für das System (11) die äquivalente „kanonische Darstellung"

$$\frac{dq_1}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_2}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \frac{dp_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \qquad \frac{dp_2}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

bzw. bei Verwendung von (63)

$$\frac{dq_1}{ds} = p_1 + u\, q_2, \qquad \frac{dq_2}{ds} = p_2 - u\, q_1, \qquad \frac{dp_1}{ds} = u\, p_2 + \psi(s)\, q_1, \qquad \frac{dp_2}{ds} = -u\, p_1 + \sigma(s)\, q_2. \tag{64}$$

Die in der Kinetik bekannte *Jacobi-Hamilton*sche Methode faßt dieses System erster Ordnung (64) als das charakteristische System einer partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + 2\, u\, \frac{\partial W}{\partial q_1}\, q_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2\, u\, \frac{\partial W}{\partial q_2}\, q_1 - \psi(s)\, q_1^2 - \sigma(s)\, q_2^2 = \text{konst.} \tag{65}$$

auf, deren vollständiges Integral dann den Schlüssel zur Lösung des ganzen Problems geben würde; denn die Rückführung auf die partielle Differentialgleichung (65) stellt den systematischen Versuch dar, auch im allgemeinen Fall auf zyklische Variable zu transformieren. Dieser Versuch ist gelungen, sobald man ein vollständiges Integral zu (65) angeben kann.

7. Die elastomechanische Bedeutung des Variationsproblems. Die Gleichungen (11) und die Beziehungen (45) können dazu dienen, den elastomechanischen Inhalt des Variationsproblems zu erklären. Das soll jetzt geschehen.

Unter Verwendung von La nach (45) hat man als Variationsproblem

$$\int_0^l La\, ds = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\dot{\bar{e}}_\xi^2 + \dot{e}_\eta^2 + 2u\,(\bar{e}_\xi\,\dot{e}_\eta - \dot{\bar{e}}_\xi\, e_\eta) - \left(\delta + \frac{P+Q(s)}{b}\right)\bar{e}_\xi^2 - \left(\beta + \frac{P+Q(s)}{a}\right)e_\eta^2\right] = \text{Extr.}.$$

Das läßt sich mit $T = c\,\varepsilon$, sowie mittels (4), (5) und (9) umschreiben in

$$\int_0^l La\, ds = \frac{1}{2a}\int_0^l \{b\,\dot{e}_\xi^2 + a\,\dot{e}_\eta^2 + [(a+b)(\varepsilon+\tau_0) - T](e_\xi\,\dot{e}_\eta - \dot{e}_\xi\, e_\eta) + a\,(\varepsilon+\tau_0)^2\,e_\xi^2$$
$$+ b\,(\varepsilon+\tau_0)^2\,e_\eta^2 - [T(\varepsilon+\tau_0) + P + Q(s)]\,(e_\xi^2 + e_\eta^2)\}\,ds = \text{Extr.}. \qquad (66)$$

Da jetzt $T \neq 0$ sein soll und das Variationsproblem von den homogenen Differentialgleichungen (11) abgeleitet worden ist, gelten für seine Anwendung folgende Voraussetzungen:

1. eingespannte Stabenden (damit das axiale Torsionsmoment konservativ bleibt),
2. querkraftfreie Stabenden (weil die Ausgangsgleichungen (11) homogen waren).

Folglich ist insbesondere Lagerfall *1* von Abb. 2 zugrunde zu legen, für den diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Wendet man auf die gedrückte und tordierte Welle das Prinzip der virtuellen Arbeit an, so lautet dies, wenn A_i^v die virtuelle Arbeit der inneren und A_a^v die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist,

$$A_i^v + A_a^v = 0\,. \qquad (67)$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte setzt sich dabei aus einem Anteil A_D^v von den Druckkräften und einem Anteil A_T^v vom Torsionsmoment herrührend zusammen:

$$A_a^v = A_D^v + A_T^v\,. \qquad (68)$$

Wenn es nun möglich ist, diese virtuellen Arbeiten als negative erste Variationen eines Potentials darzustellen:

$$A_i^v + A_D^v + A_T^v = -\delta\,(\Pi_i + \Pi_D + \Pi_T)\,,$$

so folgt aus (67)

$$\delta\,(\Pi_i + \Pi_D + \Pi_T) = 0$$

und damit die Extremalforderung

$$\Pi \equiv \Pi_i + \Pi_D + \Pi_T = \text{Extr.}\,, \qquad (69)$$

die als Prinzip vom stationären Wert des elastischen Potentials bekannt ist.

Man wird vermuten, daß die Forderungen (66) und (69) in engem Zusammenhang stehen. Läßt sich das zeigen, so ergibt sich als elastomechanischer Sinn von $\int_0^l La\, ds$ eine enge Verwandtschaft zum elastischen Potential Π.

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist, bei Beschränkung auf die von den Momenten herrührenden Anteile,

$$A_i^v = -\int_0^l (M_\xi\,\delta\omega_\xi + M_\eta\,\delta\omega_\eta + T\,\delta\varepsilon)\,ds\,. \qquad (70)$$

Jetzt sei beachtet, daß (3) gilt (mit $T_\zeta \equiv T = \text{konst.}$). Setzt man dies in (70) ein, so erhält man

$$A_i^v = -\int_0^l (a\,\omega_\xi\,\delta\omega_\xi + b\,\omega_\eta\,\delta\omega_\eta + T\,\delta\varepsilon)\,ds\,,$$

$$A_i^v = -\delta\int_0^l \left(\frac{1}{2}\,a\,\omega_\xi^2 + \frac{1}{2}\,b\,\omega_\eta^2 + T\,\varepsilon\right)ds\,,$$

woraus man für das Potential der inneren Kräfte sofort

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^l (a\,\omega_\xi^2 + b\,\omega_\eta^2 + 2\,T\,\varepsilon)\,ds$$

abliest, was wegen der Bedeutung von ω_ξ und ω_η

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^l [a\,(\dot{e}_\eta + e_\xi\,(\varepsilon+\tau_0))^2 + b\,(-\dot{e}_\xi + e_\eta\,(\varepsilon+\tau_0))^2 + 2\,T\,\varepsilon]\,ds \tag{71}$$

ergibt.

Es ist die virtuelle Arbeit A_D^v, von den Druckkräften herrührend,

$$A_D^v = \int_0^l \left(P + \int_s^l q\,ds\right)(e_\xi\,\delta e_\xi + e_\eta\,\delta e_\eta)\,ds = \int_0^l (P + Q(s))\,(e_\xi\,\delta e_\xi + e_\eta\,\delta e_\eta)\,ds\,,$$

oder

$$A_D^v = \delta\int_0^l \frac{1}{2}\,(P + Q(s))\,(e_\xi^2 + e_\eta^2)\,ds\,, \tag{72}$$

so daß man für das Potential

$$\Pi_D = -\frac{1}{2}\int_0^l (P + Q(s))\,(e_\xi^2 + e_\eta^2)\,ds$$

erhält.

Die virtuelle Arbeit A_T^v, vom Torsionsmoment T herrührend, ist

$$A_T^v = T\int_0^l \delta\tau_z\,ds.$$

Unter Verwendung von

$$\delta\tau_z = e_\xi\,\delta\omega_\xi + e_\eta\,\delta\omega_\eta + \delta\varepsilon$$

und damit

$$\delta\tau_z = e_\xi\,[\delta\dot{e}_\eta + (\varepsilon+\tau_0)\,\delta e_\xi] + e_\eta\,[-\delta\dot{e}_\xi + (\varepsilon+\tau_0)\,\delta e_\eta] + \delta\varepsilon$$

gibt das:

$$A_T^v = T\int_0^l [e_\xi\,\delta\dot{e}_\eta - e_\eta\,\delta\dot{e}_\xi + (\varepsilon+\tau_0)\,(e_\xi\,\delta e_\xi + e_\eta\,\delta e_\eta) + \delta\varepsilon]\,ds\,,$$

was weiter auszurechnen ist. Sogleich hat man

$$A_T^v = -\frac{1}{2}\,T\int_0^l [-2\,e_\xi\,\delta\dot{e}_\eta + 2\,e_\eta\,\delta\dot{e}_\xi - 2\,(\varepsilon+\tau_0)\,(e_\xi\,\delta e_\xi + e_\eta\,\delta e_\xi) - 2\,\delta\varepsilon]\,ds\,. \tag{73}$$

Ferner erhält man durch partielle Integration

$$\left.\begin{aligned} -\int_0^l 2\,e_\xi\,\delta\dot{e}_\eta\,ds &= -\int_0^l e_\xi\,\delta\dot{e}_\eta\,ds + \int_0^l \dot{e}_\xi\,\delta e_\eta\,ds - [e_\xi\,\delta e_\eta]_0^l\,,\\ \int_0^l 2\,e_\eta\,\delta\dot{e}_\xi\,ds &= \int_0^l e_\eta\,\delta\dot{e}_\xi\,ds - \int_0^l \dot{e}_\eta\,\delta e_\xi\,ds + [e_\eta\,\delta e_\xi]_0^l\,. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Setzt man (74) in (73) ein, so kommt

$$\begin{aligned} A_T^v = -\frac{1}{2}\,T\int_0^l &[e_\eta\,\delta\dot{e}_\xi + \dot{e}_\xi\,\delta e_\eta - \dot{e}_\eta\,\delta e_\xi - e_\xi\,\delta\dot{e}_\eta - 2\,(\varepsilon+\tau_0)\,(e_\xi\,\delta e_\xi + e_\eta\,\delta e_\eta) - 2\,\delta\varepsilon]\,ds\\ &+ \frac{1}{2}\,T\,[-e_\eta\,\delta e_\xi + e_\xi\,\delta e_\eta]_0^l\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Aus (75) folgt aber

$$A_T^v = -\delta\int_0^l \frac{1}{2}\,T\,[e_\eta\,\dot{e}_\xi - e_\xi\,\dot{e}_\eta - (\varepsilon+\tau_0)\,(e_\xi^2 + e_\eta^2) - 2\,\varepsilon]\,ds + \frac{T}{2}\,[e_\xi\,\delta e_\eta - e_\eta\,\delta e_\xi]_0^l\,.$$

Da die Voraussetzung gemacht worden ist, daß das axiale Torsionsmoment konservativ sein soll, damit ein Potential existiert, so muß man Randbedingungen fordern, für die e_ξ und e_η an den Stabenden zu Null werden, nämlich eingespannte Stabenden. Dann wird auch der störende Randterm zu Null, und man erhält

$$A_T^v = -\delta \int_0^l \frac{1}{2} T \left[e_\eta \dot{e}_\xi - e_\xi \dot{e}_\eta - (\varepsilon + \tau_0)(e_\xi^2 + e_\eta^2) - 2\varepsilon\right] ds ,$$

so daß das Potential

$$\Pi_T = \frac{1}{2} T \int_0^l \left[e_\eta \dot{e}_\xi - e_\xi \dot{e}_\eta - (\varepsilon + \tau_0)(e_\xi^2 + e_\eta^2) - 2\varepsilon\right] ds \tag{76}$$

wird. Gemäß (69) bekommt man jetzt mit (71), (72) und (76) für das Gesamtpotential

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \{ & a\left[\dot{e}_\eta + e_\xi(\varepsilon + \tau_0)\right]^2 + b\left[-\dot{e}_\xi + e_\eta(\varepsilon + \tau_0)\right]^2 - \left[P + Q(s)\right](e_\xi^2 + e_\eta^2) \\ & + T\left[e_\eta \dot{e}_\xi - e_\xi \dot{e}_\eta - (\varepsilon + \tau_0)(e_\xi^2 + e_\eta^2)\right]\} ds .\end{aligned}$$

Durch einfaches Umordnen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \{ & b\,\dot{e}_\xi^2 + a\,\dot{e}_\eta^2 - T(e_\xi \dot{e}_\eta - e_\eta \dot{e}_\xi) + a(\varepsilon + \tau_0)^2 e_\xi^2 + b(\varepsilon + \tau_0)^2 e_\eta^2 \\ & - \left[T(\varepsilon + \tau_0) + P + Q(s)\right](e_\xi^2 + e_\eta^2) + 2a(\varepsilon + \tau_0) e_\xi \dot{e}_\eta - 2b(\varepsilon + \tau_0) e_\eta \dot{e}_\xi\} ds .\end{aligned} \tag{77}$$

Durch partielle Integration findet man

$$\left.\begin{aligned} 2a(\varepsilon + \tau_0) \int_0^l \dot{e}_\eta e_\xi \, ds &= a(\varepsilon + \tau_0) \int_0^l \dot{e}_\eta e_\xi \, ds + a(\varepsilon + \tau_0) \left\{ \left[e_\eta e_\xi\right]_0^l - \int_0^l \dot{e}_\xi e_\eta \, ds \right\} , \\ -2b(\varepsilon + \tau_0) \int_0^l e_\eta \dot{e}_\xi \, ds &= -b(\varepsilon + \tau_0) \int_0^l e_\eta \dot{e}_\xi \, ds - b(\varepsilon + \tau_0) \left\{ \left[e_\eta e_\xi\right]_0^l - \int_0^l \dot{e}_\eta e_\xi \, ds \right\} . \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Setzt man (78) in (77) ein und beachtet noch, daß wegen der Einspannung der Stabenden die Randterme $\left[e_\eta e_\xi\right]_0^l$ wieder verschwinden, so hat man endlich

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l & b\,\dot{e}_\xi^2 + a\,\dot{e}_\eta^2 + \left[(a + b)(\varepsilon + \tau_0) - T\right](e_\xi \dot{e}_\eta - \dot{e}_\xi e_\eta) + a(\varepsilon + \tau_0)^2 e_\xi^2 + b(\varepsilon + \tau_0)^2 e_\eta^2 \\ & - \left[T(\varepsilon + \tau_0) + P + Q(s)\right](e_\xi^2 + e_\eta^2)\} ds .\end{aligned} \tag{79}$$

Der Vergleich von (79) mit (66) zeigt aber, daß

$$\Pi = a \int_0^l La \, ds \tag{80}$$

ist. Damit ist nachgewiesen, daß die Extremalbedingung (66) mit der bekannten Forderung nach dem stationären Wert des elastischen Potentials übereinstimmt.

Zusammenfassend kann man sagen: Das kinetische Analogen, bei dem die wirkenden Kräfte aus einem Potential ableitbar sind, führt auf eine Extremalbedingung $\int_0^l La \, ds = \text{Extr.}$; diese ist einer elastomechanischen Extremalbedingung $\Pi = \text{Extr.}$ äquivalent, weil das hier betrachtete elastomechanische Problem konservativ und deshalb für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte des elastomechanischen Problems ebenfalls ein Potential vorhanden ist.

Als Letztes läßt sich noch zeigen, daß für das hier behandelte Problem der Energiesatz für die wirkliche Formänderungsarbeit A_i und die von den virtuellen Arbeiten der äußeren Kräfte herrührenden Potentiale Π_D und Π_T die Beziehung

$$A_i = \Pi_D + \Pi_T \tag{81}$$

liefert.

Da außerdem bekannt[1] ist, daß das Potential der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte gleich der negativen Formänderungsarbeit ist, so daß noch $\Pi_i = -A_i$ gilt, folgt aus (81)

$$\Pi \equiv \Pi_i + \Pi_D + \Pi_T = 0\,. \tag{82}$$

Der Vergleich von (82) mit (69) und (80) zeigt aber, daß der Wert des Extremums von Π eben gerade Null sein muß.

Wegen der Tatsache, daß bei den Extremalforderungen (25), (37), (50), (66) der im Integral stehende Ausdruck homogen quadratisch ist, muß ein eingliedriger *Ritz*-Ansatz, mit gleichem Beiwert für beide im Integral auftretende Funktionen, als Bedingungsgleichung für den Eigenwert (mit $\overline{La}$ gebildet für zulässige Vergleichsfunktionen) auf

$$\int_0^l \overline{La}\, ds = 0 \tag{83}$$

führen. Das bedeutet, daß hier das *Raleigh*sche Verfahren gültig ist. Da außerdem, wegen der Anwendbarkeit des Energiesatzes, noch

$$\int_0^l La\, ds = \text{Extr.} = 0 \tag{84}$$

gilt, so folgt daraus die Möglichkeit einer Abschätzung zwischen dem wahren kritischen Wert des Problems und seiner Näherung. Denn man kann schließen, daß

$$\int_0^l \overline{La}\, ds \geqq \int_0^l La\, ds = 0$$

sein muß, was eben die Abschätzung des kritischen Wertes ermöglicht.

8. Zusammenfassung. Die Anwendung der kinetischen Analogie auf das mit bestimmten Voraussetzungen formulierte Problem der tordierten und gedrückten Welle ermöglicht es, die dem Prinzip vom stationären Wert des elastischen Potentials entsprechende Extremalbedingung in der besonders handlichen Form

$$\int_0^l [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \varphi(s)\, \bar{e}_\xi^2 + \sigma(s)\, e_\eta^2]\, ds = \text{Extr.}$$

darzustellen. Das dadurch erhaltene Variationsproblem erlaubt aber die Bestimmung von Eigenwerten für ganz beliebige Gesetze $q(s)$ der Längskraftverteilung auch bei zwei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten von Stab oder Welle, eine Aufgabe, die auf dem Wege über die Differentialgleichungen zu erheblichen Schwierigkeiten führen würde.

(Eingegangen am 23. März 1960.)

Anschrift des Verfassers: *Horst Leipholz*, Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51.

[1] *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 37, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Berechnung stationärer Temperaturverteilungen

Von A. Kneschke

1. Einleitung. Bei der Anwendung des *Ritz*schen Verfahrens zur Lösung von Randwertproblemen der Elastizitätstheorie, die vom Prinzip des Minimums der potentiellen Energie eines elastischen Körpers ausgehen, sind Ansatzfunktionen erforderlich, die die auf der Oberfläche oder Teilflächen davon vorgeschriebenen Werte der Verschiebungen annehmen. *D. Rüdiger*[1] hat das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie durch Zusatzglieder dahingehend erweitert, daß außer den Bedingungen für die Oberflächenkräfte auch die Randbedingungen für die Verschiebungen als natürliche Randbedingungen des Variationsprinzips auftreten. Damit entfällt hinsichtlich der Randbedingungen die erwähnte Beschränkung in der Wahl der Ansatzfunktionen. Für das erweiterte Minimalprinzip von der potentiellen Energie sind die *Ritz*schen Ansatzfunktionen somit an keinerlei Randbedingungen gebunden.

Das von *E. Trefftz*[2] zur genäherten Lösung von Randwertaufgaben als Gegenstück zum *Ritz*schen Verfahren angegebene Verfahren der partikulären Lösungen hat durch die Erweiterung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie eine beachtenswerte Anwendungsmöglichkeit erfahren. Die als partikuläre Lösungen der elastischen Grundgleichungen herangezogenen Ansatzfunktionen, die die Gültigkeit der Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen im Körper von vornherein gewährleisten, brauchen keine Randbedingungen zu erfüllen, wenn vom erweiterten Minimalprinzip ausgegangen wird. Daß im Gegensatz zum *Ritz*schen Verfahren hierbei keine Gebietsintegrale, sondern nur Randintegrale auftreten, ist obendrein ein nicht zu unterschätzender Vorteil des *Trefftz*schen Verfahrens. Natürlich wird man Randbedingungen, die sich ohne weiteres durch die Ansatzfunktionen erfüllen lassen, zur Vereinfachung der Rechnung bereits im Ansatz berücksichtigen.

Im folgenden soll ein für stationäre Wärmeleitvorgänge gültiges Minimalprinzip angegeben und zur Berechnung der stationären Temperaturverteilungen das *Trefftz*sche Verfahren herangezogen werden. An zwei Beispielen wird der Vorzug dieses Integrationsverfahrens gegenüber dem von *Ritz* besonders deutlich hervortreten.

2. Variationsproblem und Trefftzsche Gleichungen. Im Innern eines festen Körpers K mit der konstanten Wärmeleitzahl λ besteht eine vom Ort abhängige Wärmequellung mit der Ergiebigkeit W je Volumen- und Zeiteinheit. An den Teilflächen F_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Oberfläche F von K sollen die Temperaturen T_i, an den Teilflächen F_{2j} $(j = 1, 2, \ldots, m)$ die Wärmeströme

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{F_{2j}} = -\lambda \,\mathfrak{n}\,\mathrm{grad}\; T\Big|_{F_{2j}} = q_j$$

vorgegeben sein, während an den restlichen Teilflächen F_{3k} $(k = 1, 2, \ldots, l)$ ein natürlicher Wärmeübergang mit den Wärmeübergangszahlen α_k bei den Außentemperaturen T_{ak} stattfindet. Für die im Körper entstehende stationäre Temperaturverteilung T besteht dann die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} \lambda\, \Delta T \equiv \lambda\, \mathrm{div\,grad}\; T &= -W, \\ [T - T_i]_{F_{1i}} &= 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q_j\right]_{F_{2j}} &= 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_k\,(T - T_{ak})\right]_{F_{3k}} &= 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

[1] *D. Rüdiger*, Ing.-Arch. 27 (1960) S. 421.
[2] *E. Trefftz*, Verh. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mech., Zürich 1926, S. 131.

Sie ist, wie sogleich gezeigt wird, der Variationsaufgabe

$$J\{T\} \equiv \int_K \left[\frac{\lambda}{2}(\text{grad } T)^2 - W T\right] d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_{F_{1i}} \lambda (T - T_i) \frac{\partial T}{\partial n} do + \sum_{j=1}^{m} \int_{F_{2j}} q_j T do + \sum_{k=1}^{l} \int_{F_{3k}} \alpha_k \left(\frac{1}{2} T^2 - T_{ak} T\right) do = \text{Extr.} \quad (2)$$

gleichwertig. Die Extremalbedingung

$$\delta J = \int_K (\lambda \,\text{grad}\, T \,\text{grad}\, \delta T - W \delta T)\, d\tau -$$

$$- \sum_i \int_{F_{1i}} \lambda (T - T_i) \frac{\partial \delta T}{\partial n} do - \sum_i \int_{F_{1i}} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T do +$$

$$+ \sum_j \int_{F_{2j}} q_j \delta T do + \sum_k \int_{F_{3k}} \alpha_k (T - T_{ak}) \delta T do = 0$$

geht bei Berücksichtigung der *Greens*chen Formel

$$\int_K \text{grad } T \,\text{grad}\, \delta T \, d\tau = - \int_K \Delta T \, \delta T \, d\tau + \int_F \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \, do$$

und von

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_{1i} + \sum_{j=1}^{m} F_{2j} + \sum_{k=1}^{l} F_{3k}$$

in

$$\delta J = - \int_K (\lambda \Delta T + W) \delta T \, d\tau -$$

$$- \sum_i \int_{F_{1i}} \lambda (T - T_i) \frac{\partial \delta T}{\partial n} do + \sum_j \int_{F_{2j}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q_j\right) \delta T \, do +$$

$$+ \sum_k \int_{F_{3k}} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_k (T - T_{ak})\right] \delta T \, do = 0$$

über. Die Wärmeleitgleichung $\lambda \Delta T + W = 0$ ist demnach *Euler*sche Differentialgleichung und die Oberflächenbedingungen sind natürliche Randbedingungen des Variationsproblems (2). Das *Trefftz*sche Verfahren der partikulären Lösungen ist auf (2) anwendbar.

An die approximierenden Funktionen v_0, v_ν des Ansatzes

$$T = v_0 + \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu v_\nu$$

werden die Bedingungen

$$\lambda \Delta v_0 + W = 0, \qquad \Delta v_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gestellt. Da dann $-\lambda \Delta \bar{T} = W$ gilt, besteht nach dem *Gauß*schen Integralsatz die Beziehung

$$-\lambda \sum_i \int_{F_{1i}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} do - \lambda \sum_j \int_{F_{2j}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} do - \lambda \sum_k \int_{F_{3k}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} do = -\lambda \int_K \Delta \bar{T} \, d\tau = \int_K W \, d\tau \,.$$

Hierin kommt der Energiesatz zum Ausdruck, daß der Überschuß der ausströmenden Wärmemenge über die einströmende gleich der im Körper in der Zeiteinheit freiwerdenden Wärme ist.

Mit dem Ansatz für $\overline{T}$ ergibt sich aus (2) die Extremalbedingung

$$\frac{\partial J\{\overline{T}\}}{\partial c_\mu} = \int_K (\lambda \operatorname{grad} \overline{T} \operatorname{grad} v_\mu - W v_\mu)\, d\tau -$$

$$- \sum_i \int_{F_{1i}} \lambda (\overline{T} - T_i) \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do - \sum_i \int_{F_{1i}} \lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial n} v_\mu\, do +$$

$$+ \sum_j \int_{F_{2j}} q_j v_\mu\, do + \sum_k \int_{F_{3k}} \alpha_k (\overline{T} - T_{ak}) v_\mu\, do = 0 .$$

Wir wenden auf den ersten Teil des Raumintegrals wieder die *Greens*che Formel

$$\int_K \operatorname{grad} \overline{T} \operatorname{grad} v_\mu\, d\tau = - \int_K \Delta \overline{T} v_\mu\, d\tau + \int_F \frac{\partial \overline{T}}{\partial n} v_\mu\, do$$

an und erhalten bei Berücksichtigung von $\lambda \Delta \overline{T} + W = 0$ mit $\mu = 1, 2, \ldots, p$ die *Trefftz*schen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{F_{1i}} \lambda (\overline{T} - T_i) \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do - \sum_{j=1}^{m} \int_{F_{2j}} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial n} + q_j\right) v_\mu\, do - \sum_{k=1}^{l} \int_{F_{3k}} \left[\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial n} + \alpha_k (\overline{T} - T_{ak})\right] v_\mu\, do = 0 \quad (3a)$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{F_{1i}} \lambda v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do - \sum_{j=1}^{m} \int_{F_{2j}} \lambda \frac{\partial v_\nu}{\partial n} v_\mu\, do - \sum_{k=1}^{l} \int_{F_{3k}} \left(\lambda \frac{\partial v_\nu}{\partial n} + \alpha_k v_\nu\right) v_\mu\, do\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_{1i}} \lambda (T_i - v_0) \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do + \sum_{j=1}^{m} \int_{F_{2j}} \left(\lambda \frac{\partial v_0}{\partial n} + q_j\right) v_\mu\, do + \sum_{k=1}^{l} \int_{F_{3k}} \left[\lambda \frac{\partial v_0}{\partial n} + \alpha_k (v_0 - T_{ak})\right] v_\mu\, do. \quad (3b)$$

Für die allgemeinen orthogonalen Koordinaten u_1, u_2, u_3 mit den metrischen Fundamentalgrößen bzw. *Lamé*schen Koeffizienten

$$g_{\sigma\sigma} = L_\sigma^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta u_\sigma}\right)^2 \quad (\sigma = 1, 2, 3)$$

gilt bekanntlich

$$\operatorname{grad} \equiv \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\mathfrak{e}_\sigma}{\sqrt{g_{\sigma\sigma}}} \frac{\partial}{\partial u_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\mathfrak{e}_\sigma}{L_\sigma} \frac{\partial}{\partial u_\sigma},$$

$$\mathfrak{n} = \sum_{\sigma=1}^{3} \cos(n, u_\sigma)\, \mathfrak{e}_\sigma ,$$

und damit ist in (3a) und (3b) allgemein

$$\frac{\partial}{\partial n} = \mathfrak{n} \operatorname{grad} \equiv \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\cos(n, u_\sigma)}{L_\sigma} \frac{\partial}{\partial u_\sigma}$$

zu setzen. Hierbei sind die $\cos(n, u_\sigma)$ die Richtungskosinus der nach außen weisenden Flächennormalen und die $\mathfrak{e}_\sigma$ die Basisvektoren des allgemeinen orthogonalen Koordinatensystems.

Für die erste Randwertaufgabe mit der Randbedingung

$$T|_F = T_0$$

lauten die *Trefftz*schen Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \int_F v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do = \int_F (T_0 - v_0) \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p), \quad (4a)$$

für die zweite Randwertaufgabe mit

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_F = -q_0$$

gilt, da aus der zweiten *Green*schen Formel

$$\int_F (v_\nu \Delta v_\mu - v_\mu \Delta v_\nu)\, d\tau = \int_F \left(v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n} - v_\mu \frac{\partial v_\nu}{\partial n}\right) do$$

wegen $\Delta v_\nu = \Delta v_\mu = 0$

$$\int_F v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do = \int_F v_\mu \frac{\partial v_\nu}{\partial n}\, do$$

folgt,

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \int_F \lambda\, v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, do = -\int_F \left(\lambda \frac{\partial v_0}{\partial n} + q_0\right) v_\mu\, do \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)\,. \tag{4b}$$

Für die dritte Randwertaufgabe mit

$$\left[\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial n} + T\right]_F = T_a$$

bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \int_F \left(\lambda \frac{\partial v_\nu}{\partial n} + \alpha\, v_\nu\right) v_\mu\, do = -\int_F \left[\lambda \frac{\partial v_0}{\partial n} + \alpha\,(v_0 - T_a)\right] v_\mu\, do \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)\,. \tag{4c}$$

3. Beispiele. a) An der Grundfläche eines Kreiszylinders vom Halbmesser R und der Höhe a herrscht die konstante Temperatur T_1, an den übrigen Flächen die Temperatur Null. Die stationäre Temperaturverteilung $T(r, z)$ ist Lösung der Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &\equiv \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\,, \\ T|_{z=0} &= T_1\,,\quad T|_{z=a} = 0\,,\quad T|_{r=R} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für die Koordinatenfunktionen $v_{1\nu}$, $v_{2\nu}$ des Ansatzes

$$\bar{T} = \sum_{\nu=1}^{p} (c_{1\nu} v_{1\nu} + c_{2\nu} v_{2\nu})$$

mit

$$\left.\begin{aligned} v_{1\nu} &= J_0\left(\delta_\nu \frac{r}{R}\right)\cosh \delta_\nu \frac{z}{R}\,, \\ v_{2\nu} &= J_0\left(\delta_\nu \frac{r}{R}\right)\sinh \delta_\nu \frac{z}{R}\,, \end{aligned}\right\} J_0(\delta_\nu) = 0$$

gilt

$$\Delta v_{1\nu} = \Delta v_{2\nu} = 0\,,\quad v_{1\nu}(R, z) = v_{2\nu}(R, z) = 0\,.$$

Die aus (3a) hierfür abgeleiteten *Trefftz*schen Gleichungen lauten

$$\int_0^R \left[(\bar{T} - T_1)\frac{\partial v_{\varrho\mu}}{\partial z}\right]_{z=0} r\, dr - \int_0^R \left[\bar{T}\frac{\partial v_{\varrho\mu}}{\partial z}\right]_{z=a} r\, dr - R\int_0^a \left[\bar{T}\frac{\partial v_{\varrho\mu}}{\partial r}\right]_{r=R} dz = 0\,(\varrho = 1, 2;\ \mu = 1, \ldots, p),$$

woraus wegen

$$v_{1\nu}\Big|_{r=R} = v_{2\nu}\Big|_{r=R} = v_{2\nu}\Big|_{z=0} = 0\,,\qquad \frac{\partial v_{1\nu}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$$

nach Einsetzen von $\overline{T}$

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left\{c_{1\nu}\int_0^R\left[v_{1\nu}\frac{\partial v_{1\mu}}{\partial z}\right]_{z=a} r\,dr + c_{2\nu}\int_0^R\left[v_{2\nu}\frac{\partial v_{1\mu}}{\partial z}\right]_{z=a} r\,dr\right\} = 0\,,$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left\{c_{1\nu}\left(\int_0^R\left[v_{1\nu}\frac{\partial v_{2\mu}}{\partial z}\right]_{z=0} r\,dr - \int_0^R\left[v_{1\nu}\frac{\partial v_{2\mu}}{\partial z}\right]_{z=a} r\,dr\right) - c_{2\nu}\int_0^R\left[v_{2\nu}\frac{\partial v_{2\mu}}{\partial z}\right]_{z=a} r\,dr\right\} = T_1\int_0^R\left[\frac{\partial v_{2\mu}}{\partial z}\right]_{z=0} r\,dr$$

folgt. Bei Beachtung der Integralrelationen

$$\int_0^R r\,J_0\left(\delta_\nu\frac{r}{R}\right)J_0\left(\delta_\mu\frac{r}{R}\right)dr = \begin{cases}0 & \text{für } \mu \neq \nu\,,\\ \frac{R^2}{2}J_1^2(\delta_\nu) & \text{für } \mu = \nu\,,\end{cases}$$

$$\int_0^R r\,J_0\left(\delta_\nu\frac{r}{R}\right)dr = \frac{R^2}{\delta_\nu}J_1(\delta_\nu)$$

gehen diese Gleichungen in

$$c_{1\nu}\cosh\delta_\nu\frac{a}{R} + c_{2\nu}\sinh\delta_\nu\frac{a}{R} = 0\,,$$

$$c_{1\nu}\sinh\delta_\nu\frac{a}{R} + c_{2\nu}\cosh\delta_\nu\frac{a}{R} = -\frac{2\,T_1}{\delta_\nu\,J_1(\delta_\nu)\sinh\delta_\nu\frac{a}{R}}$$

über. Daraus ergibt sich

$$c_{1\nu} = \frac{2\,T_1}{\delta_\nu\,J_1(\delta_\nu)}\,,\qquad c_{2\nu} = -\frac{2\,T_1}{\delta_\nu\,J_1(\delta_\nu)}\coth\delta_\nu\frac{a}{R}$$

und die genäherte Temperaturverteilung

$$T(r,z) = 2\,T_1\sum_{\nu=1}^{p}\frac{J_0\delta_\nu\frac{R}{r}}{\delta_\nu\,J_1(\delta_\nu)}\left(\cosh\delta_\nu\frac{z}{R} - \coth\delta_\nu\frac{a}{R}\sinh\delta_\nu\frac{z}{R}\right). \tag{6}$$

Für $p\to\infty$ geht diese in die strenge Lösung[1] des stationären Wärmevorganges über, die man durch unmittelbare Integration des Randwertproblems (5) erhalten kann.

b) In einem unendlich langen Stab mit einem quadratischen Querschnitt von der Seitenlänge a findet eine Wärmequellung mit der konstanten Ergiebigkeit W je Volumen- und Zeiteinheit statt. Es soll die stationäre Temperaturverteilung $T(x,y)$ ermittelt werden, wenn an der Staboberfläche die Temperatur Null herrscht.

Dem Wärmeleitvorgang liegt die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned}\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{W}{\lambda}\,,\\ T|_{x=0} = 0\,,\quad T|_{x=a} = 0\,,\quad T|_{y=-a/2} = 0\,,\quad T|_{y=a/2} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

zugrunde. Für den Ansatz

$$\overline{T} = v_0 + \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu\,v_\nu = \frac{W}{2\,\lambda}(a\,x - x^2) + \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu\sin\delta_\nu\frac{x}{a}\cosh\delta_\nu\frac{y}{a}\,,$$

in dem

$$\delta_\nu = \nu\,\pi$$

gesetzt werden soll, lauten die aus (3b) ableitbaren *Trefftz*schen Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu\int_{(C)} v_\nu\frac{\partial v_\mu}{\partial n}\,ds = -\int_{(C)} v_0\frac{\partial v_\mu}{\partial n}\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)\,,$$

[1] *A. Kneschke*, Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Bd. 2, S. 300, Berlin 1960.

in denen die Integrale über den Querschnittrand (C) zu erstrecken sind. Man erhält

$$\int\limits_{(C)} v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, ds = 2 \int\limits_0^a \left[v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial y} \right]_{y=a/2} dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu \neq \mu\,, \\ \delta_\mu \sinh \frac{\delta_\mu}{2} \cosh \frac{\delta_\mu}{2} & \text{für} \quad \nu = \mu\,, \end{cases}$$

$$\int\limits_{(C)} v_0 \frac{\partial v_\mu}{\partial n}\, ds = 2 \int\limits_0^a \left[v_0 \frac{\partial v_\mu}{\partial y} \right]_{y=a/2} dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu = 2, 4, \ldots, \\ \frac{4\,a^2\,W}{\lambda} \frac{\sinh \frac{\delta_\mu}{2}}{\delta_\mu^2} & \text{für} \quad \mu = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

und damit bei ungeradem p

$$c_\nu = 0 \qquad \text{für} \qquad 2, 4, \ldots, p-1\,,$$

$$c_\nu = -\frac{4\,a^2\,W}{\lambda} \frac{1}{\delta_\nu^3 \cosh \frac{\delta_\nu}{2}} \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 3, \ldots, p\,.$$

Die stationäre Temperaturverteilung wird also durch

$$T(x,y) = \frac{W\,a^2}{2\,\lambda} \left[\frac{a\,x - x^2}{a^2} - 8 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} \frac{\sin \frac{(2\nu-1)\,\pi}{a}\, x \cosh \frac{(2\nu-1)\,\pi}{a}\, y}{(2\nu-1)^3\,\pi^3 \cosh \frac{(2\nu-1)\,\pi}{2}} \right] \tag{8}$$

genähert dargestellt, wobei $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ die größte ganze Zahl bedeutet, die kleiner oder gleich $\frac{p+1}{2}$ ist. Für $p \to \infty$ geht die Näherungslösung in die strenge Lösung über.

(Eingegangen am 1. April 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *A. Kneschke*, Freiberg (Sachsen), Richard-Wagner-Str. 13.

Der Strömungseinfluß auf den Wellenwiderstand von Schiffen*

Von F. Kolberg

1. Einleitung. Schiffsmodellversuche zur Klärung des Einflußes einer Strömung auf den Widerstand von Schiffen[1,2] haben ergeben, daß insbesondere der Wellenwiderstand durch die Strömung stark beeinflußt wird. Es zeigte sich dabei, daß bei gleicher Maximalgeschwindigkeit in der Strommitte am Ort des Schiffes der Wellenwiderstand bei Fahrt gegen den Strom kleiner ist als bei Fahrt auf stehendem Wasser, wogegen bei Fahrt mit dem Strom der Wellenwiderstand größer ist als bei Fahrt auf stehendem Wasser.

Die vorliegende theoretische Untersuchung soll zeigen, daß diese auf Grund von Versuchen erhaltenen Ergebnisse im Rahmen einer linearen Theorie in befriedigender Weise erklärt werden können. Wir werden zunächst den Fall eines exponentiellen Geschwindigkeitsprofils behandeln, da hierbei das auftretende Randwertproblem exakt lösbar ist. Später untersuchen wir dann, wie weit die so erhaltene Lösung eine Approximation darstellt für den Fall anderer Geschwindigkeitsprofile.

2. Differentialgleichung des Problems und Lösungsmethode. Das Schiff bewege sich geradlinig gleichförmig mit der Geschwindigkeit U_1 an der Wasseroberfläche eines seitlich unbegrenzten Stromes der Tiefe h (Abb. 1). Wir beziehen uns auf ein schiffsfestes kartesisches Koordinatensystem; die x-Achse weise entgegen der Fahrtrichtung, die y-Achse liege in der Wasseroberfläche und sei senkrecht zur x-Achse und schließlich weise die positive z-Achse senkrecht nach oben.

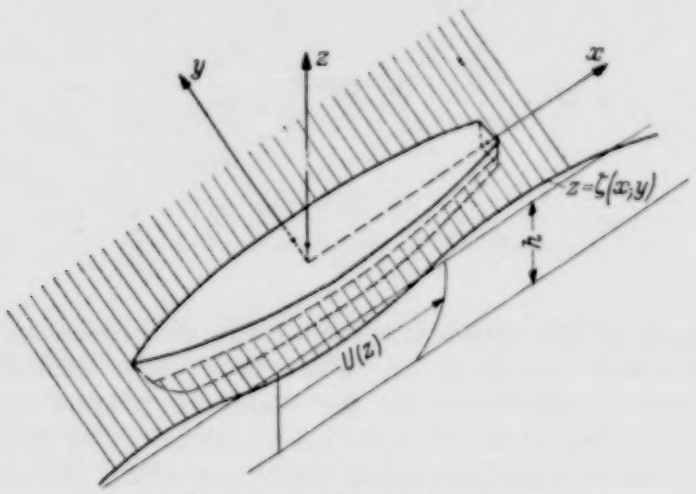


Abb. 1. Koordinatensystem und Bezeichnungen.

Sind dann ϱ die Dichte, g die Erdbeschleunigung, $p' = p - \varrho g z$ der Druck, $U(z) + u, v, w$ die Geschwindigkeitskomponenten in x-, y-, z-Richtung, so lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen für unsere stationäre Bewegung

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dU}{dz} w = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

---

* Veröffentlichung der Arbeitsgemeinschaft: Institut für Mathematik und Großrechenanlagen, TH Aachen, Versuchsanstalt f. Binnenschiffbau, Duisburg, Inst. a. d. TH Aachen.

[1] *W. Graff*, Der Strömungseinfluß auf den Form- und Reibungswiderstand von Binnenschiffen. Forschungsbericht Nr. 333 des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums NRW.

[2] *W. Graff*, Untersuchung der in stehendem und strömendem Wasser festgestellten Änderungen des Schiffswiderstandes durch Druckmessungen. Forschungsbericht Nr. 618 des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums NRW.

Dabei ist $U(z)$ das Strömungsprofil, in welches die Schiffsgeschwindigkeit U_1 mit einbezogen ist. Hinzu kommt die Kontinuitätsbedingung, welche für die Fundamentallösung, eine Quelle der Stärke Q im Punkte $(\xi, 0, \zeta)$, lautet[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = Q\,\delta(x-\xi)\,\delta(y)\,\delta(z-\zeta)\,. \tag{4}$$

Hierin ist $\delta(t)$ die *Diracsche* Delta-Funktion. Die rechte Seite der Gleichung (4) ist also Null in allen Punkten mit Ausnahme des Punktes $(\xi, 0, \zeta)$, aber das Volumenintegral der rechten Seite von (4), erstreckt über irgendeinen den Punkt $(\xi, 0, \zeta)$ enthaltenden Raumbereich, ist Q.

Differentiiert man die Gleichungen (1), (2), (3) nach x bzw. y bzw. z und addiert dann diese drei Gleichungen[1], so erhält man unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung (4)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2\,\varrho\,\frac{dU}{dz}\,\frac{\partial w}{\partial x} = -\varrho\,Q\,U(z)\,\delta'(x-\xi)\,\delta(y)\,\delta(z-\zeta)\,.$$

Wegen (3) können wir hierfür schreiben

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2\,\frac{\frac{dU}{dz}}{U}\,\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho\,Q\,U(z)\,\delta'(x-\xi)\,\delta(y)\,\delta(z-\zeta)\,, \tag{5}$$

womit die Differentialgleichung für den Druck $p(x, y, z)$ abgeleitet ist.

Durch Integration der Gleichungen (1), (2), (3) ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten[2] zu

$$u = -\frac{1}{\varrho\,U(z)}\,p - \frac{\frac{dU}{dz}}{U(z)}\int_{-\infty}^{x} w(\lambda, y, z)\,d\lambda\,, \tag{6}$$

$$v = -\frac{1}{\varrho\,U(z)}\int_{-\infty}^{x} \frac{\partial p(\lambda, y, z)}{\partial y}\,d\lambda\,, \tag{7}$$

$$w = -\frac{1}{\varrho\,U(z)}\int_{-\infty}^{x} \frac{\partial p(\lambda, y, z)}{\partial z}\,d\lambda\,. \tag{8}$$

3. Die Randbedingungen an der freien Oberfläche und die Gleichung für die freie Oberfläche. Betrachtet werde ein auf den Bereich B der Wasseroberfläche wirkendes Drucksystem $\bar{p}(x, y)$. Außerhalb des Bereiches B ist der Druck an der Wasseroberfläche $z = \zeta(x, y)$ stets gleich dem konstanten Atmosphärendruck p_0, den wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als $p_0 = 0$ annehmen können (Abb. 2). Bezeichnen wir nach *Stokes* mit D/Dt die substantielle Ableitung, so gelten an der Wasseroberfläche $z = \zeta(x, y)$ die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dp'}{Dt} &= \frac{\partial p'}{\partial x}(U+u) + \frac{\partial p'}{\partial y}\,v + \frac{\partial p'}{\partial z}\,w = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\,U\,, && (9)\\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}(U+u) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\,v \qquad\quad = w\,, && (10) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } z = \zeta(x, y)\,.$$

In (9) ist

$$p' = p - \varrho\,g\,z\,. \tag{11}$$

Werden $\zeta(x, y)$, $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$ ebenfalls als von erster Ordnung kleine Größen vorausgesetzt, so erhält man durch Linearisierung der Gleichungen (9) und (10) wegen (11)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}\,U - \varrho\,g\,w &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\,U\,, && (12)\\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,U \qquad\quad &= w\,, && (13) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{für } z = 0\\ &\text{(außerhalb } B)\,. \end{aligned}$$

---

[1] *N. J. Lighthill*, J. fluid mech. 3 (1957/58) S. 113.
[2] *Th. v. Kármán* u. *H. S. Tsien*, Quarterly appl. math. 3 (1945) S. 1.

Differentiieren wir (12) nach x und berücksichtigen wir noch (3), so erhalten wir als Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2(z)} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}, \qquad \text{für } z = 0 . \tag{14}$$

Eliminiert man w aus (12) und (13), so erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\varrho g} \frac{\partial}{\partial x} [p + \bar{p}]_{z=0} ,$$

und durch Integration nach x zwischen den Grenzen $-\infty$ und x ergibt sich hieraus die Gleichung der freien Wasseroberfläche zu

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{\varrho g} [p + \bar{p}]_{z=0} . \tag{15}$$

Hierbei wurde beachtet, daß $\zeta(x, y) \to 0$ und $p(x, y, z) \to 0$ für $x \to -\infty$ gelten muß.

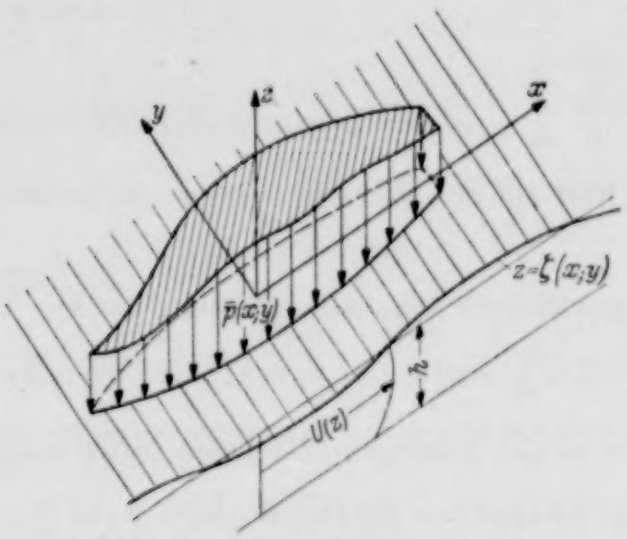


Abb. 2. Koordinatensystem und Bezeichnungen.

Mit den Gleichungen (14) und (15) haben wir die Randbedingung an der freien Oberfläche und die Gleichung der freien Oberfläche aufgestellt für den Fall, daß auf den Bereich B der freien Oberfläche ein Drucksystem wirkt. Wird jedoch ein *Michell*sches Schiff betrachtet, bei welchem die Schiffsoberfläche erzeugt wird durch eine in der Längsschiffsebene angebrachte Quell-Senkenbelegung, so hat man in (14) und (15) $\bar{p}(x, y) \equiv 0$ zu setzen und erhält als Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{g}{U^2(z)} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \qquad \text{für } z = 0 . \tag{16}$$

Die Gleichung der freien Oberfläche ergibt sich hier aus (15) zu

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{\varrho g} [p]_{z=0} . \tag{17}$$

4. Bestimmung der Elementarlösung bei unbegrenzter Strömung. Betrachtet werde eine Quelle der Stärke Q. Die Quelle liege im Punkt $x = \xi$, $y = 0$, $z = \zeta$. Das Geschwindigkeitsprofil der Anströmung sei $U = U(z)$. Nach (5) haben wir dann für den Druck die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2 \frac{\frac{dU}{dz}}{U} \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho Q U(z) \delta'(x - \xi) \delta(y) \delta(z - \zeta) . \tag{18}$$

Wir nehmen an, daß der Druck $p(x, y, z)$ eine *Fourier*transformierte $\bar{p}(s, t, z)$ besitzt:

$$\bar{p}(s, t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z) \exp [i (s x + t y)] \, dx \, dy . \tag{19}$$

Wenden wir auf die Differentialgleichung (18) die *Fourier*transformation an, so erhalten wir für die *Fourier*transformierte $\bar{p}(s, t, z)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\bar{p}}{dz^2} - 2\,\frac{\frac{dU}{dz}}{U}\,\frac{d\bar{p}}{dz} - (s^2 + t^2)\,\bar{p}$$

$$= -\varrho\, Q\, U(z)\, \delta(z-\zeta) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,(s\,x + t\,y)\right] \delta'(x-\xi)\,\delta(y)\,dx\,dy\,. \tag{20}$$

Beachtet man die Relationen

$$f_1(z)\,\delta(z-\zeta) = f_1(\zeta)\,\delta(z-\zeta)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,\delta(y)\,dy = f_2(0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x)\,\delta'(x-\xi)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f_3'(x)\,\delta(x-\xi)\,dx = -f_3'(\xi)\,,$$

so erhält man aus (20)

$$\frac{d^2\bar{p}}{dz^2} - 2\,\frac{\frac{dU}{dz}}{U}\,\frac{d\bar{p}}{dz} - (s^2 + t^2)\,\bar{p} = i\,\varrho\, Q\, U(\zeta)\, s\,\delta(z-\zeta)\exp\left[i\,s\,\xi\right]. \tag{21}$$

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall eines exponentiellen Geschwindigkeitsprofils

$$U(z) = V \exp\left[k\,z\right], \tag{22}$$

so geht (21) über in die gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2\bar{p}}{dz^2} - 2\,k\,\frac{d\bar{p}}{dz} - (s^2 + t^2)\,\bar{p} = i\,\varrho\, Q\, U(\zeta)\, s\,\delta(z-\zeta)\exp\left[i\,s\,\xi\right]. \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung der zu (23) gehörigen homogenen Differentialgleichung ist

$$\bar{p}_h(s, t, z) = \exp\left[k\,(z-\zeta)\right] \cdot \left\{A \exp\left[(z-\zeta)\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right] + B \exp\left[-(z-\zeta)\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right]\right\}. \tag{24}$$

Gesucht wird hier eine Lösung von (23) mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\bar{p}(s, t, z)$ soll für $z-\zeta > 0$ der Differentialgleichung (23) genügen und für $z \to +\infty$ den Grenzwert Null haben. Nach (24) folgt daraus

$$\bar{p}(s, t, z) = B \exp\left[k(z-\zeta)\right] \exp\left[-(z-\zeta)\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right], \qquad \text{für } z-\zeta > 0\,. \tag{25}$$

2) Für $z-\zeta < 0$ soll $\bar{p}(s, t, z)$ der Differentialgleichung (23) genügen und für $z \to -\infty$ den Grenzwert Null haben. Daraus folgt

$$\bar{p}(s, t, z) = A \exp\left[k(z-\zeta)\right] \exp\left[(z-\zeta)\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right], \qquad \text{für } z-\zeta < 0\,. \tag{26}$$

3) Für $z = \zeta$ sei $\bar{p}(s, t, z)$ stetig. Nach (25) und (26) muß also

$$A = B \tag{27}$$

sein.

4) Die erste Ableitung von $\bar{p}(s, t, z)$ habe für $z \to \zeta$ eine Unstetigkeit. Und zwar gelte

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z-\zeta>0}} \bar{p}'(s, t, z) - \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z-\zeta<0}} \bar{p}'(s, t, z) = i\,\varrho\, Q\, U(\zeta)\, s \exp\left[i\,s\,\zeta\right].$$

Unter Berücksichtigung von (25)—(27) ergibt sich daraus

$$A = B = -\frac{\varrho}{2}\, Q\, U(\zeta)\, \frac{i\,s}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} \exp\left[i\,s\,\zeta\right]$$

und somit

$$\bar{p}(s, t, z) = -\frac{\varrho}{2}\, Q\, U(\zeta)\, \frac{i\,s}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} \exp\left[k\,(z-\zeta)\right] \exp\left[-|z-\zeta|\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right] \exp\left[i\,s\,\xi\right]$$

oder wegen (22)

$$\bar{p}(s, t, z) = -\frac{\varrho}{2} Q\, U(z) \frac{i\, s}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} \exp\left[-|z-\zeta| \sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right] \exp\left[i\, s\, \xi\right]. \tag{28}$$

Das Inversionstheorem der *Fourier*transformation ergibt dann

$$p(x, y, z) = -\frac{\varrho}{2} Q\, U(z) \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\, s}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} \exp\left[-i\{s(x-\xi) + t\, y\}\right.$$
$$\left. - |z-\zeta| \sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right] ds\, dt. \tag{29}$$

Aus einer Tafel der Integraltransformationen[1] entnimmt man

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i\,(s\,x + t\,y) - |z| \sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right]}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} ds\, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach x

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\, s}{\sqrt{k^2 + s^2 + t^2}} \exp\left[-i\,(s\,x + t\,y) - |z| \sqrt{k^2 + s^2 + t^2}\right] ds\, dt$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{\frac{1}{2\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right\}.$$

Hiermit erhalten wir aus (29)

$$p(x, y, z) = -\varrho\, U(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}\right), \tag{30}$$

und die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w ergeben sich aus (6) bis (8) in Übereinstimmung mit *Lighthill*[2] zu

$$u(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}\right)$$
$$+ \frac{Q\, k}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial z} + k\right) \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left[-k \sqrt{(\lambda-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(\lambda-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}} d\lambda, \tag{31}$$

$$v(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}\right), \tag{32}$$

$$w(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + k\right) \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\exp\left[-k \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}\right). \tag{33}$$

Damit ist die Grundlösung einer Quelle in einem seitlich und der Tiefe nach nicht begrenzten Strom mit exponentiellem Geschwindigkeitsprofil abgeleitet.

5. Die Elementarlösung bei flachem Wasser und freier Wasseroberfläche. Wir nehmen nunmehr an, daß das Strömungsfeld begrenzt sei durch den Tankboden $z = -h$ und durch die freie Oberfläche bei $z = 0$. Gesucht ist also eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2\, k \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho\, Q\, U(\zeta)\, \delta'(x-\xi)\, \delta(y)\, \delta(y)\, \delta(z), \tag{34}$$

die der Randbedingung am Tankboden $w(x, y, -h) = 0$, also nach (10)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{35}$$

[1] *A. Erdélyi*, Tables of integral transforms, New York 1954.
[2] Siehe Fußnote 1 von S. 124.

und der Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{g}{V^2}\frac{\partial p}{\partial z} = 0\,, \qquad \text{für } z = 0 \qquad [U(0) = V] \tag{36}$$

genügt.

Mit (30) haben wir nun eine Lösung der inhomogenen Gleichung (34) bestimmt. Beachten wir noch die Integraldarstellung (29), so können wir mit

$$s = K\cos\Theta\,, \qquad t = K\sin\Theta$$

die Lösung (30) auch in der Form

$$p(x,y,z) = -\frac{i\varrho\,Q\,U(z)}{8\,\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\exp\left[-i\,K\left\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\right\} - |z-\zeta|\,K^*\right]dK \tag{37}$$

schreiben. Dabei wurde zur Abkürzung

$$K^* = \sqrt{K^2 + k^2} \tag{38}$$

gesetzt. Zur Anpassung an die Randbedingung (35) addieren wir zu (37) den Druck

$$p_1(x,y,z) = \frac{i\varrho\,Q\,U(z)}{8\,\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\exp\left[-i\,K\left\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\right\}\right]$$
$$\times\, F(\Theta,K)\exp\left[-K^*\,z\right]dK\,, \tag{39}$$

der eine Lösung der zu (34) gehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Die Randbedingung am Tankboden $z = -h$

$$\left.\frac{\partial(p+p_1)}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

liefert

$$F(\Theta,K) = -\frac{K^*+k}{K^*-k}\exp\left[-K^*(2\,h+\zeta)\right].$$

Damit wird

$$p_1(x,y,z) = -\frac{i\varrho\,Q\,U(z)}{8\,\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\frac{K^*+k}{K^*-k}\exp\left[-i\,K\left\{(x-\zeta)\cos\Theta + y\sin\Theta\right\}\right]$$
$$\times\exp\left[-K^*(z+2\,h+\zeta)\right]dK\,. \tag{40}$$

Zur Erfüllung der Oberflächenbedingung (36) addieren wir zu $p(x,y,z) + p_1(x,y,z)$ einen weiteren Druck $p_2(x,y,z)$, der bereits der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

genügt.

Für $p_2(x,y,z)$ machen wir den Ansatz

$$p_2(x,y,z) = \frac{i\varrho\,Q\,U(z)}{8\,\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\exp\left[-i\,K\left\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\right\}\right]$$
$$\times\left\{G_1(\Theta,K)\cosh\left[K^*(z+h)\right] + G_2(\Theta,K)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}dK\,.$$

Die Randbedingung am Tankboden

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

liefert dann

$$G_2(\Theta, K) = -\frac{k}{K^*} G_1(\Theta, K).$$

Setzen wir $G_1(\Theta, K) \equiv G(\Theta, K)$, so ist also

$$p_2(x, y, z) = \frac{i\varrho Q U(z)}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\Theta \, d\Theta \int_0^{\infty} \frac{K^2}{K^*} \exp\left[-iK\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}\right]$$

$$\times G(\Theta, K) \left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - \frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\} dK \tag{41}$$

eine der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

genügende Lösung der zu (34) gehörigen homogenen Differentialgleichung. Die Summe $p(x, y, z) + p_1(x, y, z) + p_2(x, y, z)$ muß jetzt noch der Randbedingung (36) an der freien Oberfläche genügen. Mit (37), (40) und (41) ergibt sich daraus $G(\Theta, K)$ zu

$$G(\Theta, K) = \frac{2\exp\left[-K^* h\right] K^{*2}\left\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\right\}}{(K^*-k)K\cosh\left[K^* h\right]}$$

$$\times \frac{K + K_0\left(\frac{K^*}{K} - \frac{k}{K}\right)\sec^2\Theta}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]}.$$

Hierbei wurde $K_0 = g/V^2$ gesetzt.

Damit erhalten wir

$$p_2(x, y, z) = \frac{i\varrho Q U(z)}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\Theta \, d\Theta \int_0^{\infty} \frac{K + K_0\left(\frac{K^*}{K} - \frac{k}{K}\right)\sec^2\Theta}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]}$$

$$\times \frac{\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right\}KK^*}{(K^*-k)\cosh\left[K^* h\right]}$$

$$\times \exp\left[-K^* h\right]\exp\left[-iK\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\}\right] dK, \tag{42}$$

oder, wenn dieser Ausdruck noch etwas umgeformt wird,

$$p_2(x, y, z) = \frac{i\varrho Q U(z)}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\Theta \, d\Theta$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - \frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\} \cdot \left\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right] - \frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^* h\right]}$$

$$\times \exp\left[-iK\{(x-\xi)\cos\Theta + y\sin\Theta\} - K^* h\right]$$

$$\times \frac{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]} dK. \tag{43}$$

Dieses Integral ist im Sinne des *Cauchy*schen Hauptwertes zu verstehen.

Mit (30), (40) und (43) haben wir damit für den Gesamtdruck $\bar{p}_g$ einer Quelle in exponentieller Grundströmung, wenn jeweils die Realteile der Ausdrücke (40) und (43) genommen werden,

$$\bar{p}_g(x,y,z) = -\varrho\, U(z)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{4\pi}\,\frac{\exp\left[-k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right)$$

$$-\frac{\varrho\, Q\, U(z)}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\, d\Theta\int_0^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\,\frac{K^*+k}{K^*-k}$$

$$\times\exp\left[-K^*(z+2h+\zeta)\right]\cos\left[y\,K\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right]dK$$

$$+\frac{\varrho\, Q\, U(z)}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\, d\Theta\int_0^{\infty}\frac{\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right]-\frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^*h\right]}$$

$$\times\left\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right]-\frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\right\}\,\frac{K^*\{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\}}{K^*-(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^*h\right]}$$

$$\times\exp\left[-K^*h\right]\cos\left[y\,K\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right]dK\,. \qquad (44)$$

Dieser Druck $\bar{p}_g(x,y,z)$ erfüllt alle bisher geforderten Randbedingungen. Nun ist aber klar, daß weit vor der Quelle ($x\to-\infty$) keine Druckstörungen bzw. Wellen vorhanden sein dürfen, d. h. es muß

$$\lim_{x\to-\infty}\bar{p}_g = 0$$

gelten. Um nun den Grenzwert $\lim_{x\to\pm\infty}\bar{p}_g(x,y,z)$ zu untersuchen, verfahren wir wie folgt. Der Grenzwert $\lim_{x\to\pm\infty}\bar{p}_g(x,y,z)$ des ersten Summanden in (44) ist selbstverständlich Null. Von dem Integral

$$\int_0^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\,\frac{K^*+k}{K^*-k}\exp\left[-K^*(z+2h+\zeta)\right]\cdot\cos\left[y\,K\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right]dK$$

läßt sich durch Aufspaltung des Integrationsintervalles $(0,\infty)$ in die Teilintervalle (x, A) und (A,∞) unter Benutzung der *Dirichlet*schen Formel nachweisen, daß es für $x\to\pm\infty$ gleichmäßig in $\Theta\,(0\leqq\Theta\leqq\pi/2)$ gegen Null konvergiert. Damit ist auch der Grenzwert des zweiten Summanden von (44) für $x\to\pm\infty$ gleich Null.

Zu untersuchen bleibt also lediglich der dritte Summand von (44). Der Integrand dieses Summanden hat Polstellen in den Wurzeln von

$$K^*-(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^*h\right]=0\,. \qquad (45)$$

Bei festem $\Theta\,(0\leqq\Theta\leqq\pi/2)$ ist von diesen Wurzeln genau eine reell und größer als Null, weshalb bei der Integration bezüglich K der *Cauchy*sche Hauptwert zu nehmen ist. Zur Untersuchung des Grenzwertes für $x\to\pm\infty$ schreiben wir den dritten Summanden von (44) in der Form

$$p_2(x,y,z) = \mathrm{Re}\,\frac{\varrho\, Q\cdot U(z)}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\, d\Theta$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right]-\frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}\left\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right]-\frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^*h\right]}$$

$$\times\frac{K^*\{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\}}{K^*-(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^*h\right]}\exp\left[-K^*h\right]\frac{i}{2}$$

$$\times\left\{\exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta+y\sin\Theta\}\right]\right.$$

$$\left.+\exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta-y\sin\Theta\}\right]\right\}dK\,. \qquad (46)$$

Bevor wir dazu übergehen, in dieser Integraldarstellung den Integrationsweg der Integration bezüglich K umzuformen, wollen wir die Lösungen der Gleichung (45) diskutieren. Wir schreiben (45) in der Form

$$\frac{K^* h}{K_0 h \left(1 + \frac{k}{K_0} \cos^2 \Theta\right) \operatorname{sek}^2 \Theta} = \operatorname{tgh} [K^* h] . \tag{47}$$

Für die Existenz reeller dieser Gleichung genügender $K^* h > 0$ ist die Bedingung

$$K_0 h \left(1 + \frac{k}{K_0} \cos^2 \Theta\right) \operatorname{sek}^2 \Theta > 1$$

notwendig und hinreichend. Da uns hauptsächlich die Singularität auf dem Integrationsweg $K \geqq 0$ interessiert, haben für uns nur die reellen Wurzeln Bedeutung, für die $h K^* \geqq h k$ ist, was auf

$$K_0 h \left(1 + \frac{k}{K_0} \cos^2 \Theta\right) \operatorname{sek}^2 \Theta > \delta \tag{48}$$

führt, wo δ eine gewisse Zahl größer als 1 ist und sich zu

$$\delta = \frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} \tag{49}$$

bestimmt. Mit (49) können wir (48) umschreiben zu

$$K_0 h + k h \cos^2 \Theta > \frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} \cos^2 \Theta ,$$

woraus

$$\cos^2 \Theta < \frac{K_0 h}{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h} = \frac{1}{F_h^2 \left(\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h\right)} \tag{50}$$

folgt. Hier wurde zur Abkürzung die *Froude*sche Tiefenzahl

$$F_h^2 = \frac{1}{K_0 h} = \frac{V^2}{g h} \tag{51}$$

eingeführt. Setzen wir

$$\Theta_0 = \arccos \sqrt{\frac{K_0 h}{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h}} = \arccos \left\{ \frac{1}{F_h \sqrt{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h}} \right\} , \tag{52}$$

so bedeutet die Ungleichung (50), daß reelle Lösungen $K^* \geqq k$ bzw. $K \geqq 0$ der Gleichung (47) nur vorhanden sind, wenn

$$\Theta \geqq \Theta_0 . \tag{53}$$

ist. Hieraus und aus (52) entnimmt man, daß für

$$F_h \sqrt{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h} < 1$$

die Gleichung (47) für jedes Θ mit $0 \leqq \Theta \leqq \pi/2$ genau eine Wurzel mit $K \geqq 0$ besitzt, wogegen für

$$F_h \sqrt{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h} > 1$$

die Gleichung (47) genau eine reelle Wurzel mit $K \geqq 0$ besitzt, wenn Θ im Intervall

$$\arccos \left\{ \frac{1}{F_h \sqrt{\frac{k h}{\operatorname{tgh} [k h]} - k h}} \right\} = \Theta_0 \leqq \Theta \leqq \frac{\pi}{2} \tag{54}$$

liegt.

Wir untersuchen noch das Auftreten anderer Wurzeln unserer Gleichung. Setzen wir $K^* = i \bar{K}$, so geht (47) über in

$$\frac{\bar{K} h}{K_0 h \operatorname{sek}^2 \Theta \left(1 + \frac{k}{K_0} \cos^2 \Theta\right)} = \operatorname{tg} [\bar{K} h] . \tag{55}$$

Zu festem Θ mit $\Theta \leqq \Theta \leqq \pi/2$ existiert also eine unendliche Folge rein imaginärer Wurzeln $K_n^* = i\,\bar{K}_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \bar{K}_n = \infty$. Die zugehörigen Werte K_n bestimmen sich aus der Gleichung

$$\sqrt{K_n^2 + k^2} = i\,\bar{K}_n$$

zu

$$K_n = \pm\, i\sqrt{\bar{K}_n^2 + k^2}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{56}$$

Da $\bar{K}_0 = 0$ eine Lösung von (55) ist, haben wir als rein imaginäre Wurzeln von (47) mit kleinstem Absolutbetrag

$$K_0 = \pm\, i\,k.$$

Mit den rein imaginären Wurzeln (56) und den vorhin bestimmten reellen Wurzeln sind alle in der Halbebene $\mathrm{Re}\,K \geqq 0$ gelegenen Wurzeln der Gleichung (47) bestimmt.

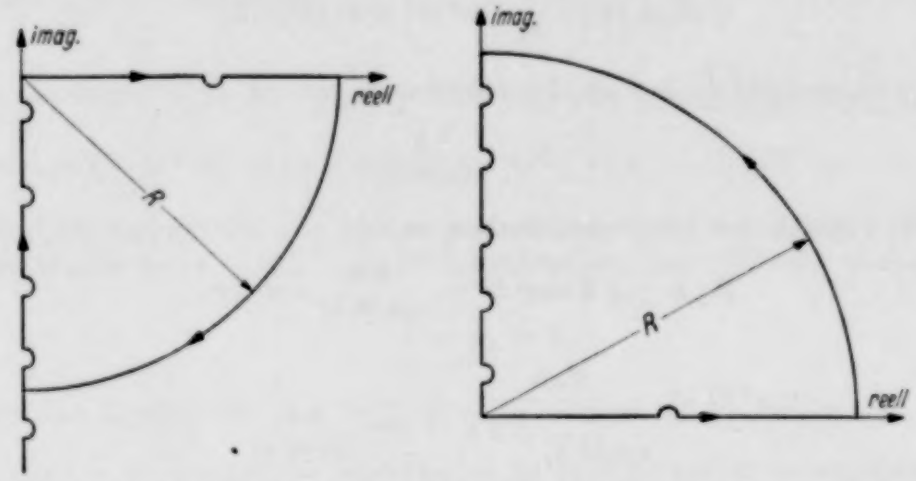


Abb. 3. a) Integrationsweg für $(x-\xi)\cos\Theta \pm y\cdot\sin\Theta > 0$; b) Integrationsweg für $(x-\xi)\cos\Theta \pm y\cdot\sin\Theta < 0$.

In (46) betrachten wir nunmehr die Integration bezüglich K. Zunächst nehmen wir an, daß der Integrationsweg bezüglich K in (46) nicht die positive reelle Achse sei, sondern wählen als Integrationsweg den in Abb. 3 dargestellten, in der komplexen K-Ebene liegenden Weg. Die Polstellen des Integranden werden auf kleinen Halbkreisen umgangen, so daß der Integrand im Inneren der in Abb. 3 dargestellten Wege eine reguläre Funktion darstellt und somit dieses Integral nach dem *Cauchy*schen Integralsatz verschwindet. Die gewählten Integrationswege liegen hierbei in der unteren bzw. oberen Halbebene, je nachdem

$$(x-\xi)\cos\Theta \pm y\sin\Theta > 0 \quad \text{bzw.} \quad (x-\xi)\cos\Theta \pm y\sin\Theta < 0$$

ist.

Nun streben die Integrale längs des Viertelkreisbogens mit $R \to \infty$ gegen Null, und die Integrale längs der Halbkreisbögen um die singulären Stellen lassen sich mittels Residuenrechnung auswerten. Der *Cauchy*sche Hauptwert des in (46) auftretenden Integrals bezüglich K längs der positiven reellen Achse ist damit gleich $\mp \pi i$ mal Residuum des Integranden in der auf der positiven reellen Achse gelegenen Polstelle plus $\mp \pi i$ mal Summe des Residuen der auf der negativen bzw. positiven imaginären Achse gelegenen Polstellen des Integranden plus dem *Cauchy*schen Hauptwert (Polstellen werden durch kleine Intervalle ausgespart) des Integrals über die negative bzw. positive imaginäre Achse, je nachdem $(x-\xi)\cos\Theta \pm y\sin\Theta > 0$ bzw. $(x-\xi)\cos\Theta \pm y\sin\Theta < 0$ ist. Von diesen beiden zuletzt aufgeführten Bestandteilen läßt sich nachweisen daß sie für $|x| \to \infty$ gegen Null streben. Damit haben wir

$$p_2(x,y,z) = \pm\frac{\varrho\,Q\,U(z)}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}\cos\Theta\exp\left[-K^*h\right]$$
$$\times\frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\;\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^*h\right]}$$
$$\times\frac{K^* + (K_0 + k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\sec^2\Theta\,\mathrm{sekh}^2\left[K^*h\right]}\cos\left[y\,K\sin\Theta\right]\cos\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right]d\Theta + o(1)$$

für $x \to \pm\infty$. Hierbei ist K als Funktion von Θ implizit durch die Gleichung

$$\sqrt{K^2+k^2} - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\left[\sqrt{K^2+k^2}\cdot h\right] = 0$$

bestimmt.

Um nun zu erreichen, daß der Gesamtdruck p_g weit vor der Quelle ($x \to -\infty$) gegen Null strebt, müssen wir also zu $\bar{p}_g$ nach (44) noch den Druck

$$p_3(x,y,z) = \frac{\varrho\,Q\,U(z)}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}\cos\Theta\exp\left[-K^*h\right]$$
$$\times\frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^*h\right]}$$
$$\times\frac{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\left[K^*h\right]}\cos\left[yK\sin\Theta\right]\cos\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]d\Theta \quad (57)$$

addieren und erhalten damit für den Gesamtdruck

$$p_g(x,y,z) = -\varrho\,U(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{4\pi}\frac{\exp\left[-k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right)$$
$$-\frac{\varrho Q\,U(z)}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta\int_0^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\frac{K^*+k}{K^*-k}\exp\left[-K^*(z+2h+\zeta)\right]\cos\left[yK\sin\Theta\right]$$
$$\times\sin\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]dK + \frac{\varrho\,Q\,U(z)}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{K^*\{\cosh\left[K^*(z+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\}}{\cosh\left[K^*h\right]}$$
$$\times\frac{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta}{K-(K_0+k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^*h\right]}\exp\left[-K^*h\right]\cos\left[yK\sin\Theta\right]$$
$$\times\sin\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]dK + \frac{\varrho\,Q\,U(z)}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}\cos\Theta\exp\left[-K^*h\right]$$
$$\times\frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\{\cosh\left[K^*(\zeta+h)\right]-(k/K^*)\sinh\left[K^*(\zeta+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^*h\right]}$$
$$\times\frac{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\left[K^*h\right]}\cos\left[yK\sin\Theta\right]\cos\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]d\Theta. \quad (58)$$

Mit (58) haben wir die Elementarlösung unseres Problems bestimmt.

6. Die Lösung für das *Michell*sche Schiff und der Wellenwiderstand. Nach *Michell*[1,2] wird ein Verdrängungsschiff in erster Näherung ersetzt durch eine Quell-Senken-Belegung der Mittschiffsebene. Ist S die Mittschiffsebene, sind ξ und ζ die Koordinaten in der Mittschiffsebene, und ist $\eta = \eta(\xi,\zeta)$ die Gleichung der Schiffsoberfläche, so lautet die kinematische Randbedingung an der Schiffsoberfläche

$$\pm(U+u)\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + v(-1) \pm w\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} = 0\,, \qquad \text{für } \eta = \pm\,\eta(\xi,\zeta)\,.$$

Durch Linearisierung ergibt sich hieraus

$$v(\xi,0,\zeta) = \pm\,U\frac{\partial\eta}{\partial\xi}. \quad (59)$$

Zum anderen haben wir nach (32) für die Geschwindigkeits-Komponente $v(x,y,z)$ einer Quell-Senken-Belegung der Mittschiffsebene S von der Dichte $\sigma(\xi,\zeta)$

$$v(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S\sigma(\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\exp\left[-k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right)d\xi\,d\zeta$$

[1] *J. H. Michell*, Phil. Mag. 5 (1898) S. 106.
[2] *JK. Lunde*, Trans. SNAME 59 (1951) S. 24.

oder

$$v(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} y \iint_S \sigma(\xi,\zeta) \exp\left[-k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right] \times \left\{\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}^3} + \frac{k}{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right\} d\xi\, d\zeta\,. \tag{59'}$$

Der Grenzwert $\lim_{y\to 0} v(x,y,z)$ läßt sich mit den Hilfsmitteln aus der Theorie der Potentiale von Flächenbelegungen[1] bestimmen, und es ergibt sich

$$\lim_{y\to\pm 0} v(x,y,z) = \pm\frac{1}{2}\sigma(x,z)\,. \tag{60}$$

Sind ξ,ζ die Koordinaten in der Längsschiffsebene, so gilt nach (60)

$$v(\xi,\pm 0,\zeta) = \pm\frac{1}{2}\sigma(\xi,\zeta)\,,$$

und mit (59) ergibt sich die Dichte der unser Schiff ersetzenden Quell-Senken-Belegung zu

$$\sigma(\xi,\zeta) = 2\,U(\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,. \tag{61}$$

Betrachten wir jetzt anstelle der Einzelquelle in (58) eine Quell-Senken-Belegung der Mittschiffsebene S mit der durch (61) gegebenen Dichte in einer exponentiellen Grundströmung, so haben wir analog zu (58) für den Gesamtdruck

$$p_g(x,y,z) = -\varrho\cdot U(z)\iint_S U(\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\exp\left[-k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\right) d\xi\, d\zeta$$

$$-\frac{\varrho\,U(z)}{\pi^2}\iint_S U(\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,d\xi\,d\zeta\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta\int_0^{\infty}\frac{K^2}{K^*}\frac{K^*+k}{K^*-k}\exp\left[-K^*(z+2h+\zeta)\right]$$

$$\times\cos\left[yK\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]dK + \frac{2\varrho\,U(z)}{\pi^2}\iint_S U(\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,d\xi\,d\zeta\int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{K^*\{\cosh[K^*(z+h)]-(k/K^*)\sinh[K^*(z+h)]\}\{\cosh[K^*(\zeta+h)]-(k/K^*)\sinh[K^*(\zeta+h)]\}}{\cosh[K^*h]}$$

$$\times\frac{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta}{K^*-(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta\,\mathrm{tgh}\,[K^*h]}\exp\left[-K^*h\right]\cos\left[yK\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right)dK$$

$$+2\frac{\varrho\,U(z)}{\pi}\iint_S U(\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,d\xi\,d\zeta\int_{\Theta_0}^{\pi/2}\cos\Theta\exp\left[-K^*h\right]$$

$$\times\frac{K^{*2}\{\cosh[K^*(z+h)]-(k/K^*)\sinh[K^*(z+h)]\}\{\cosh[K^*(\zeta+h)]-(k/K^*)\sinh[K^*(\zeta+h)]\}}{K\cosh[K^*h]}$$

$$\times\frac{K^*+(K_0+k\cos^2\Theta)\sec^2\Theta}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)h\sec^2\Theta\,\mathrm{sek\,h}^2[K^*h]}\cos\left[yK\sin\Theta\right]\cos\left[(x-\xi)K\cos\Theta\right]d\Theta\,. \tag{62}$$

Hierbei ist Θ_0 aus (52) zu entnehmen. Aus (62) erhält man wegen (17) die Gleichung der freien Wasseroberfläche $\zeta(x,y)$ dadurch, daß man in (62) $z=0$ setzt und mit dem Faktor $1/\varrho\,g$ multipliziert.

Hier interessiert uns insbesondere noch ein Ausdruck für den Wellenwiderstand des *Michell*schen Schiffes. Nach *Lunde* kann man den Wellenwiderstand mittels der Formel

$$R = 2\iint_S p_g(\xi',0,\zeta')\frac{\partial\eta}{\partial\xi'}\,d\xi'\,d\zeta', \qquad \text{mit } \eta=\eta(\xi',\zeta') \tag{63}$$

[1] *O. D. Kellog*, Foundations of potential theory, New York 1953.

berechnen. Für p_g ist der Ausdruck aus (62) einzusetzen. Macht man dies, so sieht man, daß die Beiträge zu R, die von den ersten drei Summanden von (62) herrühren, bei Vertauschungen der Integrationsvariablen ξ', ζ' und ξ, ζ in die negativen Werte übergehen. Die Beiträge dieser drei Summanden zu R müssen aiso verschwinden, und der Wellenwiderstand ergibt sich zu

$$R = \frac{4\varrho}{\pi} \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \cos\Theta \, \frac{K^{*2}\{K^* + (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\}\exp[-K^* h]}{K\cosh[K^* h]\,\{1 - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^* h]\}}\, d\Theta$$
$$\times \int_S\int U(\zeta')\,\frac{\partial\eta}{\partial\xi'}\,\{\cosh[K^*(\zeta' + h)] - (k/K^*)\sinh[K^*(\zeta' + h)]\}\exp[-iK\cos\Theta\,\xi']\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$\times \int_S\int U(\zeta)\,\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,\{\cosh[K^*(\zeta + h)] - (k/K^*)\sinh[K^*(\zeta + h)]\}\exp[iK\cos\Theta\,\xi]\,d\xi\,d\zeta\,. \quad (64)$$

Setzen wir noch

$$A + iB = \int_S\int U(\zeta)\,\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\,\{\cosh[K^*(\zeta + h)] - (k/K^*)\sinh[K^*(\zeta + h)]\}\exp[-iK\cos\Theta\,\xi]\,d\xi\,d\zeta\,, \quad (65)$$

so wird

$$R = \frac{4\varrho}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}(A^2 + B^2)\,\frac{\cos\Theta\,K^{*2}\exp[K^* h]}{K\cosh[K^* h]}\,\frac{K^* + (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta}{1 - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^* h]}\,d\Theta\,. \quad (66)$$

Unter Beachtung der Relation

$$K^* = (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}[K^* h] \quad (67)$$

läßt sich (66) noch umformen zu

$$R = \frac{4\varrho}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}(A^2 + B^2)\,\frac{K^{*2}\,\mathrm{sek}\,\Theta}{K\cosh^2[K^* h]}\,\frac{K_0 + k\cos^2\Theta}{1 - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^* h]}\,d\Theta \quad (68)$$

oder

$$R = \frac{8\varrho}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}(A^2 + B^2)\,\frac{\mathrm{sek}\,\Theta\,K^{*2}\,\mathrm{tgh}[K^* h]\,(K_0 + k\cos^2\Theta)}{K\{\sinh[2K^* h] - 2K^* h\}}\,d\Theta\,. \quad (69)$$

Andere Darstellungen für R lassen sich noch angeben, wenn man mittels (67) anstelle von Θ die Integrationsveränderliche K einführt. Hierauf kommen wir später zurück.

7. Die Lösung für das *Hognersche* Drucksystem. Wir betrachten hier ein auf den Bereich B der freien Wasseroberfläche wirkendes Drucksystem $\bar{p}(x, y)$. Wir wollen hierbei annehmen, daß der vorgegebene Druck als *Fourier*integral dargestellt werden kann:

$$\bar{p}(x, y) = \frac{\varrho V}{4\pi^2}\int_B\int \bar{p}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[-iK\{(x - \xi)\cos\Theta + (y - \eta)\sin\Theta\}]\,K\,dK\,. \quad (70)$$

Die in den Abschnitten **2** und **3** hergeleiteten Differentialgleichungen und Randbedingungen gelten natürlich auch hier. Für den Druck $p(x, y, z)$ werden wir damit auf den Ansatz

$$p(x, y, z) = \frac{\varrho\,U(z)}{4\pi^2}\int_B\int \bar{p}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp[-iK\{(x - \xi)\cos\Theta + (y - \eta)\sin\Theta\}]$$
$$\times \{F_1(\Theta, K)\cosh[K^*(z + h)] + F_2(\Theta, K)\sinh[K^*(z + h)]\}\,dK \quad (71)$$

geführt.

Hierbei ist wieder

$$K^* = \sqrt{K^2 + k^2} \qquad \text{und} \qquad U(z) = V e^{kz}\,,$$

Die Randbedingung am Tankboden

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

liefert nun

$$F_2(\Theta, K) = -\frac{k}{K^*}\, F_1(\Theta, K)\,, \tag{72}$$

und mit $F_1(\Theta, K) \equiv F(\Theta, K)$ haben wir damit den Ansatz

$$p(x,y,z) = \frac{\varrho\, U(z)}{4\pi^2} \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta + (y-\eta)\sin\Theta\}\right]$$
$$\times\, F(\Theta, K)\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - \frac{k}{K^*}\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\} dK\,. \tag{73}$$

Nach (12) haben wir als Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{g}{V^2}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z} \qquad \text{für } z = 0\,.$$

Mit (70) und (73) ergibt sich daraus

$$F(\Theta, K) = -\frac{K^*}{\cosh\left[K^* h\right]}\,\frac{K}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]}$$

und somit

$$p(x,y,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{4\pi^2} \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \int_0^{\infty} \exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta + (y-\eta)\sin\Theta\}\right]$$
$$\times\, \frac{K K^*}{\cosh\left[K^* h\right]}\,\frac{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]}\, dK\,.$$

Der Übergang zur reellen Darstellung liefert

$$p(x,y,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{\pi} \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_0^{\pi/2} d\Theta \int_0^{\infty} \frac{K K^*\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^* h\right]}$$
$$\times\, \frac{\cos\left[(y-\eta)\,K\sin\Theta\right]\cos\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right]}{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\cdot\mathrm{tgh}\,\left[K^* h\right]}\, dK\,. \tag{74}$$

Zur Umformung des Integrationsweges bezüglich K geht man wie in Abschnitt 6 von der Darstellung

$$p(x,y,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{\pi^2}\, Re \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_0^{\pi/2} d\Theta \int_0^{\infty} \frac{K K^*\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^* h\right]\left\{K^* - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\left[K^* h\right]\right\}}$$
$$\times\, \frac{1}{2}\left\{\exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta + (y-\eta)\sin\Theta\}\right]\right.$$
$$\left. + \exp\left[-i\,K\{(x-\xi)\cos\Theta - (y-\eta)\sin\Theta\}\right]\right\} dK\,.$$

aus. Ändert man wie in Abschnitt 6 den Integrationsweg, so läßt sich genau wie dort zeigen, daß für $x \to \pm\infty$

$$p(x,y,z) = \pm\frac{\varrho\, U(z)}{\pi} \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{K^{*2}\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^* h\right]\left\{1 - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\left[K^* h\right]\right\}}$$
$$\times\, \cos\left[(y-\eta)\,K\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right] d\Theta + o(1)$$

wird. Damit die Wellen weit vor dem Drucksystem aufgehoben werden, hat man also zu $p(x,y,z)$ nach (74) den Druck

$$p_1(x,y,z) = \frac{\varrho\, U(z)}{\pi} \iint_B \bar{p}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{K^{*2}\left\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\right\}}{\cosh\left[K^* h\right]\left\{1 - (K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\left[K^* h\right]\right\}}$$
$$\times\, \cos\left[(y-\eta)\,K\sin\Theta\right]\sin\left[(x-\xi)\,K\cos\Theta\right] d\Theta \tag{75}$$

zu addieren, und erhält somit als Lösung unseres Problems

$$p_g(x,y,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{\pi^2}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_0^{\pi/2} d\Theta \int_0^{\infty} \frac{K\,K^*\{\cosh[K^*(z+h)] - (k/K^*)\sinh[K^*(z+h]\}}{\cosh[K^*h]\{K^* - (K_\varrho + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}[K^*h]\}}$$

$$\times \cos[(y-\eta)\,K\sin\Theta]\cos[(x-\xi)\,K\cos\Theta]\,dK + \frac{\varrho\,U(z)}{\pi}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\times \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{K^{*2}\{\cosh[K^*(z+h)] - (k/K^*)\sinh[K^*(z+h)]\}}{\cosh[K^*h]\{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^*h]\}}$$

$$\times \cos[(y-\eta)\,K\sin\Theta]\sin[(x-\xi)\,K\cos\Theta]\,d\Theta\,. \tag{76}$$

Die Gleichung der freien Wasseroberfläche ist nach (15) zu berechnen. Der Wellenwiderstand ist hier nach der Formel

$$R = \int_B\int \bar{p}(\xi',\eta')\,\frac{\partial\zeta}{\partial\xi'}\,d\xi'\,d\eta' \tag{77}$$

zu bestimmen, wo $\partial\zeta/\partial x$ sich aus (76) mittels

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{1}{\varrho\,g}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right]_{z=0}$$

berechnet. Mithin wird

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{V}{\pi^2 g}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta \int_0^{\infty} K^2K^*\,\frac{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}[K^*h]}{K^* - (K_0+k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}[K^*h]}$$

$$\times\cos[(y-\eta)\,K\sin\Theta]\sin[(x-\xi)\,K\cos\Theta]\,dK + \frac{V}{\pi g}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_{\Theta_0}^{\pi/2}\cos\Theta\,K\,K^{*2}$$

$$\times\frac{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}[K^*h]}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^*h]}\cos[(y-\eta)\,K\sin\Theta]\cos[(x-\xi)\,K\cos\Theta]\,d\Theta$$

$$-\frac{V}{\pi^2 g}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \int_0^{\pi/2}\cos\Theta\,d\Theta$$

$$\times\int_0^{\infty} K^2\cos[(y-\eta)\,K\sin\Theta]\sin[(x-\xi)\,K\cos\Theta]\,dK\,. \tag{78}$$

Setzt man dies in (77) ein, so sieht man, daß die Beiträge zu R, die vom ersten und dritten Summanden von (78) herrühren, bei Vertauschung von ξ', η' und ξ, η in die entsprechenden negativen Werte übergehen. Die Beiträge dieser beiden Summanden zu R müssen also verschwinden, und für den Wellenwiderstand erhalten wir:

$$R = \frac{V}{\pi g}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}\frac{\cos\Theta\,K\,K^{*2}(1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}[K^*h])}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^*h]}\,d\Theta\int_B\int \bar{p}(\xi',\eta')$$

$$\times\exp[-i\,K(\xi'\cos\Theta+\eta'\sin\Theta)]\,d\xi'\,d\eta'\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\exp[i\,K(\xi\cos\Theta+\eta\sin\Theta)]\,d\xi\,d\eta\,. \tag{79}$$

Führt man zur Abkürzung

$$P = \int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,, \qquad C + i\,D = \frac{1}{P}\int_B\int \bar{p}(\xi,\eta)\exp[-i\,K(\xi\cos\Theta+\eta\sin\Theta)]\,d\xi\,d\eta \tag{80}$$

ein, so wird

$$R = \frac{V\,P^2}{\pi g}\int_{\Theta_0}^{\pi/2}(C^2+D^2)\,\frac{\cos\Theta\,K\,K^{*2}(1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}[K^*h])}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2[K^*h]}\,d\Theta\,. \tag{81}$$

Beachtet man noch

$$K^* = (K_0 + k\cos^2\Theta)\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\,, \tag{82}$$

so kann man hierfür schreiben

$$R = \frac{P^2}{\pi V}\int\limits_{\Theta_0}^{\pi/2}(C^2+D^2)\,\frac{\mathrm{sek}\,\Theta\,KK^*\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]}{1-(K_0+k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h]}\,d\Theta\,. \tag{83}$$

Berücksichtigt man schließlich, daß wegen (82)

$$(K_0 + k\cos^2\Theta)\,h\,\mathrm{sek}^2\,\Theta\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h] = \frac{2K^* h}{\sinh\,[2K^* h]}$$

gilt, so erhält man

$$R = \frac{2P^2}{\pi V}\int\limits_{\Theta_0}^{\pi/2}(C^2+D^2)\,\frac{\mathrm{sek}\,\Theta\,K\,K^*\sinh^2\,[K^* h]}{\sinh\,[2K^* h]-2K^* h}\,d\Theta\,. \tag{84}$$

Durch Einführung der Integrationsveränderlichen K an Stelle von Θ können noch andere Darstellungen für R angegeben werden.

8. Lösung für den ebenen Fall des *Hognerschen* Drucksystems. Hier entfällt die Abhängigkeit von y und die Gleichungen (5) bis (8) reduzieren sich auf

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-2\,\frac{\frac{dU}{dz}}{U}\,\frac{\partial p}{\partial z}=0\,, \tag{85}$$

$$u = -\frac{1}{\varrho\,U(z)}\,p - \frac{\frac{dU}{dz}}{U(z)}\int\limits_{-\infty}^{x} w(\lambda,z)\,d\lambda\,, \tag{86}$$

$$w = -\frac{1}{\varrho\,U(z)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial p(\lambda,z)}{\partial z}\,d\lambda\,. \tag{87}$$

In (85) ist die rechte Seite Null, da im Strömungsbereich $-h \leqq z < 0$ keine Quellen liegen sollen. Die Randbedingung (12) gilt unverändert.

Geht man aus der Darstellung des auf B vorgegebenen Druckes in der Form

$$\bar{p}(x) = \frac{\varrho\,V}{2\pi}\int\limits_{B}\bar{p}(\xi)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\exp\,[-i\,K\,(x-\xi)]\,dK\,, \tag{88}$$

so wird man für $p(x,z)$ auf den Ansatz

$$p(x,z) = \frac{\varrho\,U(z)}{2\pi}\int\limits_{B}\bar{p}(\xi)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\exp\,[-i\,K\,(x-\xi)]\,\{F_1(\Theta,K)\cosh\,[K^*(z+h)] + F_2(\Theta,K)\sinh\,[K^*(z+h)]\}\,dK \tag{89}$$

geführt, wobei

$$K^* = \sqrt{K^2+k^2} \qquad \text{und} \qquad U(z) = V\,e^{kz}$$

ist. Die Randbedingung am Tankboden

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

ergibt

$$F_2(\Theta,K) = -\frac{k}{K^*}\,F_1(\Theta,K)\,.$$

Mit $F_1(\Theta, K) \equiv F(\Theta, K)$ hat man also für $p(x, z)$ den Ansatz

$$p(x,z) = \frac{\varrho\, U(z)}{2\pi} \int_B \bar{p}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \exp\left[-i\,K\,(x-\xi)\right] F(\Theta, K) \{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}\, dK\,, \tag{90}$$

und aus der Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{g}{V^2}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{d^2\bar{p}}{dx^2}\,, \qquad \text{für } z = 0$$

ergibt sich mit (88) und (90)

$$F(\Theta, K) = -\frac{K^*}{\cosh\left[K^* h\right]\{K^* - (K_0 + k)\tgh\left[K^* h\right]\}}\,, \qquad K_0 = \frac{g}{V^2}$$

und somit

$$p(x,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{2\pi} \int_B \bar{p}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{K^*\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}}{\cosh\left[K^* h\right]\{K^* - (K_0+k)\tgh\left[K^* h\right]\}} \exp\left[-i\,K\,(x-\xi)\right] dK\,. \tag{91}$$

Der in (91) auftretende Integrand hat nun Polstellen, wenn

$$K^* = (K_0 + k)\tgh\left[K^* h\right]$$

ist. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\frac{K^* h}{(K_0 + k)\, h} = \tgh\left[K^* h\right],$$

so sieht man, daß der Integrand von (91) für $(K_0 + k)\, h < \dfrac{k\, h}{\tgh\left[k\, h\right]}$ keine auf der positiven reellen K-Achse liegende Polstelle hat, wogegen für

$$(K_0 + h)\, h > \frac{k\, h}{\tgh\left[k\, h\right]}$$

stets eine und nur eine positive reelle Polstelle des Integranden existiert. Ist also

$$(K_0 + k)\, h > \frac{k\, h}{\tgh\left[k\, h\right]},$$

und ändert man den in (91) auftretenden Integrationsweg wie in Abschnitt 6, so läßt sich zeigen, daß für $x \to \pm\infty$

$$p(x,z) = \pm\frac{\varrho\, U(z)}{2} \int_B \bar{p}(\xi)\, \frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^* h\right]\{1 - (K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\left[K^* h\right]\}} \sin\left[(x-\xi)\, K\right] d\xi + o(1)$$

ist. Damit die Wellen weit vor dem Drucksystem aufgehoben werden, haben wir also zu $p(x, z)$ nach (91) den Druck

$$p_1(x,z) = \frac{\varrho\, U(z)}{2}\, \frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^* h\right]\{1 - (K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\left[K^* h\right]\}} \int_B \bar{p}(\xi)\sin\left[(x-\xi)\, K\right] d\xi \tag{92}$$

zu addieren. Somit lautet hier die Lösung unseres Problems in reeller Darstellung:

$$p_g(x,z) = -\frac{\varrho\, U(z)}{2\pi} \int_B \bar{p}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{K^*\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}}{\cosh\left[K^* h\right]\{K^* - (K_0+k)\tgh\left[K^* h\right]\}} \cos\left[(x-\xi)\, K\right] dK$$
$$+\frac{\varrho\, U(z)}{2}\, \frac{K^{*2}\{\cosh\left[K^*(z+h)\right] - (k/K^*)\sinh\left[K^*(z+h)\right]\}}{K\cosh\left[K^* h\right]\{1 - (K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\left[K^* h\right]\}} \int_B \bar{p}(\xi)\sin\left[(x-\xi)\, K\right] d\xi\,. \tag{93}$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung für die freie Wasseroberfläche mittels (13). Der Wellenwiderstand ist zu berechnen nach der Formel

$$R = \int_B p(\xi')\, \frac{d\zeta}{d\xi'}\, d\xi'\,, \tag{94}$$

wobei sich $d\zeta/dx$ wegen (88) und (93) aus

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{\varrho\, g}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\bar{p}}{dx}\right]_{z=0}$$

ergibt zu

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{V}{2\pi g}\int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{K\, K^*\{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\}}{K^* - (K_0 + k)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]} \sin\left[(x-\xi)\, K\right] dK$$

$$+ \frac{V}{2\,g}\,\frac{K^{*2}\{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\}}{1-(K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h]} \int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\cos\left[(x-\xi)\, K\right] d\xi$$

$$- \frac{V}{2\pi g}\int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty K \sin\left[(x-\xi)\, K\right] dK\,.$$

Läßt man wie früher die Bestandteile fort, die bei zweifacher Integration über die Drucklinie den Beitrag Null ergeben, so erhält man

$$R = \frac{V}{2\,g}\,\frac{K^{*2}\{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\}}{1-(K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h]} \int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi')\exp\left[-i\, K\,\xi'\right] d\xi' \int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\exp\left[i\, K\,\xi\right] d\xi\,. \tag{95}$$

Mit den Abkürzungen

$$P = \int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\, d\xi\,, \qquad C + i\, D = \frac{1}{P}\int_{\bar{B}} \bar{p}(\xi)\exp\left[-i\, K\,\xi\right] d\xi \tag{96}$$

ergibt sich aus (95)

$$R = \frac{V\,P^2}{2\,g}\,(C^2 + D^2)\,\frac{K^{*2}\{1-(k/K^*)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\}}{1-(K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h]}\,, \tag{97}$$

falls

$$(K_0 + k)\, h > \frac{k\, h}{\mathrm{tgh}\,[k\, h]}$$

ist. Beachtet man noch

$$K^* = (K_0 + k)\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]\,, \tag{98}$$

so können wir (97) in der Form

$$R = \frac{P^2}{2\,V}\,(C^2 + D^2)\,\frac{K^*\,\mathrm{tgh}\,[K^* h]}{1-(K_0+k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h]} \tag{99}$$

schreiben. Wird schließlich berücksichtigt, daß wegen (98)

$$(K_0 + k)\, h\,\mathrm{sekh}^2\,[K^* h] = \frac{2\,K^* h}{\sinh\,[2\,K^* h]}$$

gilt, so erhält man

$$R = \frac{P^2}{V}\,(C^2 + D^2)\,\frac{K^*\sinh^2\,[K^* h]}{\sinh\,[2\,K^* h] - 2\,K^* h}\,. \tag{100}$$

Damit sind für das dreidimensionale und zweidimensionale Problem die Formeln für den Wellenwiderstand abgeleitet. Die Berechnung des Wellenwiderstandes nach diesen Formeln und ein Vergleich mit Versuchsergebnissen, wie auch eine Untersuchung des Wellenfeldes in großem Abstand vor und hinter dem Schiff, wird Gegenstand einer späteren Arbeit sein.

(Eingegangen am 6. April 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *F. Kolberg*, Laurensberg b. Aachen, Roermonderstr. 2 f.

Ein einfaches Rechenschema zur Aufstellung der Frequenzgleichung eines an den Enden freien Drehschwingers

Von R. Priebs*

1. Einleitung. Im folgenden wird gezeigt, wie die Frequenzgleichung eines an den Enden freien Drehschwingers als Polynom des Frequenzquadrates $z = \omega^2$ sehr übersichtlich und schnell aufgestellt werden kann. Das Wesentliche besteht dabei in der Herleitung von Rekursionsformeln zwischen den Koeffizienten der Frequenzgleichungen eines aus n Drehmassen und eines aus $(n-1)$ Drehmassen bestehenden Schwingers. Diese Rekursionsbeziehungen erlauben die Aufstellung eines für die numerische Berechnung der Frequenzgleichung sehr praktischen Rechenschemas. Die Lösung der Frequenzgleichung kann nach dem *Horner-Newton*schen Verfahren erfolgen (Abschn. 4).

Das Vorgehen ist eng verwandt mit dem Verfahren von *W. A. Tuplin*, bietet jedoch rechentechnische und zeitliche Vorteile gegenüber jenem (Abschn. 6).

Hinsichtlich des Zeit- bzw. Rechenaufwandes dürfte das hier beschriebene Vorgehen insbesondere dann dem Verfahren von *Holzer-Tolle* überlegen sein, wenn keine Näherungswerte für die Eigenfrequenzen vorliegen und mehr als eine Eigenfrequenz gesucht wird. Zur allgemeinen Orientierung über alle wesentlichen hierher gehörenden Verfahren sei auf den umfassenden Bericht von *K. Klotter* „Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen“[1] verwiesen. Hinweise auf diese Arbeit werden im folgenden durch „Bericht *Klotter*, . . .“ gegeben.

2. Grundlagen. Unseren Betrachtungen liegt ein Drehschwinger nach Abb. 1 zugrunde. Er besteht aus $n+1$ Scheiben mit den Massenträgheitsmomenten Θ_λ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n)$, die elastisch verbunden sind durch n glatte, zylindrische, trägheitslos angenommene Wellenstücke mit den Torsionssteifigkeiten c_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$. Der Winkel ϑ_λ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n)$ beschreibt die Verdrehung der Masse Θ_λ. In dem Wellenstück mit der Torsionssteifigkeit c_λ ist das Drillungsmoment D_λ wirksam. Bei der Berechnung wird jegliche Dämpfung vernachlässigt.

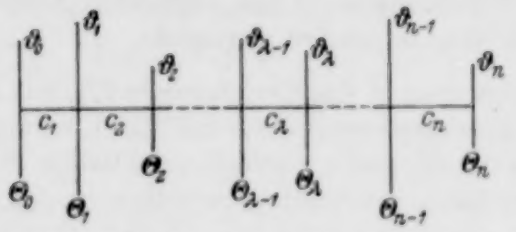


Abb. 1. Gebräuchliche Darstellung eines an den Enden freien Drehschwingers.

Die Bewegungsgleichungen des Drehschwingers sind gegeben durch die dynamischen Gleichungen

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda = D_\lambda - D_{\lambda+1} \tag{1}$$

und die elastischen Gleichungen

$$D_\lambda = c_\lambda (\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda) . \tag{2}$$

Mit dem harmonischen Ansatz für den Verdrehungswinkel

$$\vartheta_\lambda = u_\lambda \cos \omega t \tag{3.1}$$

und das Drillungsmoment

$$D_\lambda = x_\lambda \cos \omega t \tag{3.2}$$

erhält man aus (1) und (2), wenn

$$z = \omega^2 \tag{4}$$

* Der Verfasser ist den Herren Prof. Dr. phil. *P. Matthieu* (TU Berlin), Prof. Dr.-Ing. *K. Klotter* (TH Darmstadt) und Dipl.-Ing. *H. Pfützner* (TU Berlin) für wertvolle Hinweise sehr zu Dank verpflichtet.

[1] Ing.-Arch. 17 (1949) S. 1.

gesetzt wird, die Gleichungen

$$x_{\lambda+1} = x_\lambda + \Theta_\lambda u_\lambda z\,, \qquad u_\lambda = u_{\lambda-1} - \frac{x_\lambda}{c_\lambda}\,. \tag{5}$$

Die x_λ bezeichnen gemäß (3.2) die Amplituden der in den Wellenstücken wirksamen Drillungsmomente, die u_λ gemäß (3.1) die Amplituden der Ausschläge der Drehmassen.

Da der Drehschwinger an den Enden frei ist, ergeben sich die Bedingungen

$$x_0 = 0 \tag{6.1}$$

und

$$x_{n+1} = 0\,. \tag{6.2}$$

Ferner ist $c_0 = c_{n+1} = 0$.

Aus (5) erhält man somit ausgeschrieben für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$ die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \Theta_0 u_0 z\,,\\
u_1 &= u_0 - \frac{x_1}{c_1}\,,\\
x_2 &= x_1 + \Theta_1 u_1 z\,,\\
u_2 &= u_1 - \frac{x_2}{c_2}\,,\\
&\vdots\\
x_\lambda &= x_{\lambda-1} + \Theta_{\lambda-1} u_{\lambda-1} z\,,\\
u_\lambda &= u_{\lambda-1} - \frac{x_\lambda}{c_\lambda}\,,\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= x_n + \Theta_n u_n z\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die sukzessive Durchrechnung der Gleichungen (7) für einen festen Zahlenwert von $z = \omega^2$ liefert ein „Restmoment" x_{n+1}. Berechnet man sich mehrere solcher Restmomente und trägt diese über z auf, so ergeben sich die Eigenfrequenzen aus den Schnittpunkten dieser Kurve mit der z-Achse; denn nur für diese Werte ist (6.2) erfüllt. Dieses Vorgehen ist als Verfahren von *Holzer-Tolle* bekannt. Für die Durchführung dieser impliziten Methode sind einige für die numerische Rechnung zweckmäßige Rechenschemata entwickelt worden. Ein großer Teil der Rechnung kann auch durch zeichnerisches Vorgehen ersetzt werden (Verfahren von *Gümbel-Geiger*)[1].

W. A. Tuplin benutzt die Gleichungen (5) zur expliziten Aufstellung der Frequenzgleichung, der gleiche Gedanke liegt auch dem folgenden zugrunde.

3. Das Rechenschema. Ersetzt man in den Gleichungen (7), mit $\lambda = 1$ beginnend, nacheinander die $x_{\lambda+1}$ und die u_λ durch die vorangegangenen x_λ und $u_{\lambda-1}$, so erhält man Polynome in z, deren Koeffizienten nur noch u_0 und die Θ_λ und c_λ enthalten. Für die Polynome, die sich für die Drillmomentenamplituden ergeben, kann geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= u_0(A_{11} z)\,,\\
x_2 &= u_0(A_{21} z - A_{22} z^2)\,,\\
x_3 &= u_0(A_{31} z - A_{32} z^2 + A_{33} z^3)\,,\\
&\vdots\\
x_\lambda &= u_0(A_{\lambda 1} z - A_{\lambda 2} z^2 + \cdots - (-1)^\lambda A_{\lambda\lambda} z^\lambda)\,,\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= u_0(A_{n+1,1} z - A_{n+1,2} z^2 + \cdots - (-1)^{n+1} A_{n+1,n+1} z^{n+1})\,.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Polynome, die sich für die Amplituden der Ausschläge ergeben, sind darstellbar durch

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= u_0(1 - B_{21} z)\,,\\
u_2 &= u_0(1 - B_{31} z + B_{32} z^2)\,,\\
u_3 &= u_0(1 - B_{41} z + B_{42} z^2 - B_{43} z^3)\,,\\
&\vdots\\
u_\lambda &= u_0(1 - B_{\lambda+1,1} z + B_{\lambda+2,2} z^2 - \cdots + (-1)^\lambda B_{\lambda+1,\lambda} z^\lambda)\,,\\
&\vdots\\
u_n &= u_0(1 - B_{n+1,1} z + B_{n+1,2} z^2 - \cdots + (-1)^n B_{n+1,n} z^n)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1] Vgl. Bericht *Klotter*, S. 12—16.

Die Indizes der Koeffizienten A bzw. B wurden so festgelegt, daß der erste Index auf die Anzahl der Drehmassen hinweist und der zweite auf die zugehörige Potenz von z.

Nun benutzen wir (8) und (9) bei der sukzessiven Durchrechnung der Gleichungen (7), wobei wir den Parameter z mitführen. Es ergeben sich dabei ganz einfache Rekursionsbeziehungen zwischen den Koeffizienten, die durch eine besondere Umrahmung gekennzeichnet sind:

$$x_1 = \Theta_0 u_0 z = u_0(A_{11} z) ,$$

also

$$\boxed{A_{11} = \Theta_0} ; \tag{10.1}$$

$$u_1 = u_0 - \frac{x_1}{c_1} = u_0 (1 - B_{21} z) ,$$
$$= u_0 \left(1 - \frac{A_{11}}{c_1} z\right) ,$$

also

$$\boxed{B_{21} = \frac{A_{11}}{c_1}} ; \tag{10.2}$$

$$x_2 = x_1 + \Theta_1 u_1 z = u_0 (A_{21} z - A_{22} z^2) ,$$
$$= u_0 \left(A_{11} z + \Theta_1 (1 - B_{21} z) z\right) ,$$
$$= u_0 \left((A_{11} + \Theta_1) z - \Theta_1 B_{21} z^2\right) ,$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} A_{21} &= A_{11} + \Theta_1 , \\ A_{22} &= \Theta_1 B_{21} \end{aligned}} ; \tag{10.3}$$

$$u_2 = u_1 - \frac{x_2}{c_2} = u_0(1 - B_{31} z + B_{32} z) ,$$
$$= u_0 \left(1 - B_{21} z - \frac{1}{c_2} (A_{21} z - A_{22} z^2)\right) ,$$
$$= u_0 \left(1 - \left(B_{21} + \frac{A_{21}}{c_2}\right) z + \frac{A_{22}}{c_2} z^2\right) ,$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} B_{31} &= B_{21} + \frac{A_{21}}{c_2} , \\ B_{32} &= \frac{A_{22}}{c_2} \end{aligned}} . \tag{10.4}$$

Die Fortführung dieser Rechnungen liefert

$$\boxed{\begin{aligned} A_{31} &= A_{21} + \Theta_2 , \\ A_{32} &= A_{22} + \Theta_2 B_{31} , \\ A_{33} &= \Theta_2 B_{32} \end{aligned}} ; \tag{10.5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{41} &= B_{31} + \frac{A_{31}}{c_3} , \\ B_{42} &= B_{32} + \frac{A_{32}}{c_3} , \\ B_{43} &= \frac{A_{33}}{c_3} \end{aligned}} ; \tag{10.6}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_{41} &= A_{31} + \Theta_3 , \\ A_{42} &= A_{32} + \Theta_3 B_{41} , \\ A_{43} &= A_{33} + \Theta_3 B_{42} , \\ A_{44} &= \Theta_3 B_{43} \end{aligned}} . \tag{10.7}$$

Das Bildungsgesetz für weitere Koeffizienten ist sofort erkennbar. Es kann leicht durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Die aus den Rekursionsformeln (10.1) bis (10.7) ersichtlichen Gesetzmäßigkeiten kann man durch das Koeffizientenschema Tabelle 1 sehr übersichtlich darstellen. In der untersten Zeile dieses Schemas sind die zu den Koeffizienten einer Spalte gehörenden Potenzen von z und das jeweilige Vorzeichen zur Erleichterung noch angegeben. Außerdem soll noch bemerkt werden, daß die Addition der in einem Kästchen stehenden beiden Größen die unter dem Kästchen stehende Größe ergibt.

Tabelle 1. *Das Koeffizientenschema.*

$A_{11}=\Theta_0$						
Θ_1	c_1					
A_{21}	$B_{21}=\frac{A_{11}}{c_1}$	$A_{22}=\Theta_1 B_{21}$				
Θ_2	$\frac{A_{21}}{c_2}$	$\Theta_2 B_{31}$	c_2			
A_{31}	B_{31}	A_{32}	$B_{32}=\frac{A_{22}}{c_2}$	$A_{33}=\Theta_2 B_{32}$		
Θ_3	$\frac{A_{31}}{c_3}$	$\Theta_3 B_{41}$	$\frac{A_{32}}{c_3}$	$\Theta_3 B_{42}$	c_3	
A_{41}	B_{41}	A_{42}	B_{42}	A_{43}	$B_{43}=\frac{A_{33}}{c_3}$	$A_{44}=\Theta_3 B_{43}$
$+z$	$-z$	$-z^2$	$+z^2$	$+z^3$	$-z^3$	$-z^4$

Das Koeffizientenschema kann ohne weiteres für die numerische Berechnung der Koeffizienten herangezogen werden. Es ist jedoch vorteilhaft, wenn die dabei erforderlichen Operationen mit dimensionslosen Größen durchgeführt werden können. Zu diesem Zweck schreiben wir die einzelnen Massenträgheitsmomente und Torsionssteifigkeiten als Vielfache eines Bezugs-Massenträgheitsmomentes Θ^* bzw. einer Bezugs-Torsionssteifigkeit c^*:

$$\Theta_\lambda = \Theta'_\lambda \, \Theta^* , \qquad c_\lambda = c'_\lambda \, c^* . \tag{11.1}$$

Es ist also Θ_λ das Θ'_λ-fache von Θ^* und c_λ das c'_λ-fache von c^*. Durch Wahl der Bezugsgrößen Θ^* und c^* können wir dann geeignete dimensionslose Größen

$$\Theta'_\lambda = \frac{\Theta_\lambda}{\Theta^*} \qquad \text{bzw.} \qquad c'_\lambda = \frac{c_\lambda}{c^*} \tag{11.2}$$

bilden.

Denkt man sich nun das Koeffizientenschema mit den Werten $\Theta'_\lambda \, \Theta^*$ und $c'_\lambda \, c^*$ durchgerechnet, so erkennt man, daß jedes Glied der ersten Spalte den Faktor Θ^*, jedes Glied der zweiten Spalte den Faktor Θ^*/c^*, jedes Glied der dritten, vierten, fünften, ... Spalte jeweils den Faktor Θ^{*2}/c^*, Θ^{*2}/c^{*2}, Θ^{*3}/c^{*2}, ... enthält. Diese gemeinsamen Faktoren jedes Gliedes einer Spalte kann man herausziehen und mit den jeweiligen Potenzen von z (vgl. Koeffizientenschema) zusammenfassen. Mit den Abkürzungen

$$\zeta = \frac{\Theta^*}{c^*} \, z \tag{12.1}$$

und

$$p = c^* \, \zeta = \Theta^* \, z \tag{12.2}$$

gelangt man dann zu dem Rechenschema von Tabelle 2.

Man erkennt, daß die Durchrechnung des Rechenschemas mit den Zahlenwerten Θ'_λ und c'_λ die x_λ und u_λ jetzt wie folgt liefert:

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda(\zeta) &= u_0 \, p \, (A'_{\lambda 1} - A'_{\lambda 2} \, \zeta + \cdots - (-1)^\lambda \, A'_{\lambda\lambda} \, \zeta^{\lambda-1}) , \\ u_\lambda(\zeta) &= u_0 \, (1 - B'_{\lambda+1,1} \, \zeta + \cdots + (-1)^\lambda \, B'_{\lambda+1,\lambda} \, \zeta^\lambda) . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Bei der numerischen Berechnung der A'_{ik} und B'_{ik} nach den durch das Rechenschema gegebenen Vorschriften erweist es sich als vorteilhaft, daß häufig Multiplikationen bzw. Divisionen mit der gleichen Größe durchzuführen sind.

In praktischen Fällen genügt es, ein leeres Formblatt etwa in der Art von Tabelle 3 zu benutzen.

Beim Ausfüllen des Formblattes wird es nur zu Anfang nötig sein, das Rechenschema daneben zu legen, um sicherer rechnen zu können. Übersichtlichkeit und mechanischer Ablauf der Rechenoperationen prägen sich schnell ein.

Tabelle 2. *Das Rechenschema.*

$A'_{11}=\Theta'_0$						
Θ'_1	c'_1					
A'_{21}	$B'_{21}=\frac{A'_{11}}{c'_1}$	$A'_{22}=\Theta'_1 B'_{21}$				
Θ'_2	$\frac{A'_{21}}{c'_2}$	$\Theta'_2 B'_{31}$	c'_2			
A'_{31}	B'_{31}	A'_{32}	$B'_{32}=\frac{A'_{22}}{c'_2}$	$A'_{33}=\Theta'_2 B'_{32}$		
Θ'_3	$\frac{A'_{31}}{c'_3}$	$\Theta'_3 B'_{41}$	$\frac{A'_{32}}{c'_3}$	$\Theta'_3 B'_{42}$	c'_3	
A'_{41}	B'_{41}	A'_{42}	B'_{42}	A'_{43}	$B'_{43}=\frac{A'_{33}}{c'_3}$	$A'_{44}=\Theta'_3 B'_{43}$
$+p$	$-\zeta$	$-p\zeta$	$+\zeta^2$	$+p\zeta^2$	$-\zeta^3$	$-p\zeta^3$

Tabelle 3. *Formblatt für die Anwendung des Rechenschemas.*

$\Theta'_0=\ldots$						
$\Theta'_1=\ldots$	$c'_1=\ldots$					
$\Theta'_2=\ldots$			$c'_2=\ldots$			
$\Theta'_3=\ldots$					$c'_3=\ldots$	

4. Aufstellung und Lösung der Frequenzgleichung. Die Frequenzgleichung ergibt sich (vgl. Abschn. 2) aus der Bedingung $x_{n+1}=0$. Mit Hilfe des Rechenschemas erhält man sie in der Form

$$F_{n+1}(\zeta)=\frac{x_{n+1}(\zeta)}{u_0\,p}=A'_{n+1,1}-A'_{n+1,2}\,\zeta+\cdots-(-1)^{n+1}A'_{n+1,n+1}\,\zeta^n=0\,. \tag{14}$$

Hier ist bereits der die triviale Lösung $\zeta_0=0$ enthaltende gemeinsame Faktor $p=c^*\,\zeta$ aller Koeffizienten abgespalten. Aus ihren nichttrivialen Lösungen ζ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ergeben sich die Eigenfrequenzen ω_i gemäß (4) und (12.1) zu

$$\omega_i=\sqrt{z_i}=\sqrt{\zeta_i\frac{c^*}{\Theta^*}}\,. \tag{15}$$

Die Ermittlung der Nullstellen ζ_i wird man im allgemeinen am schnellsten durch die Kombination von *Horner*schema und *Newton*scher Wurzelverbesserung[1] erreichen. Als Näherungswert für die $(i+1)$-te Wurzel kann dabei die vorangegangene i-te Wurzel benutzt werden, wobei man mit der bekannten trivialen Lösung $z_0=0$ bzw. $\zeta_0=0$ beginnt und natürlich jedesmal mit der so gefundenen Wurzel reduziert, sobald diese in der erforderlichen Genauigkeit vorliegt. Die Reduktion ist bei Benutzung des *Horner*schemas sehr einfach! Durch dieses systematische Vorgehen ist es nicht, wie z. B. bei *Holzer-Tolle*, notwendig, durch Probieren die Nullstellen aufzusuchen, sondern die gute Konvergenz des Verfahrens führt, ausgehend von der trivialen Lösung, rasch zur Grundfrequenz, von dieser wiederum zur Eigenfrequenz der ersten Oberschwingung usw.

Die Aufstellung der Frequenzgleichung ist besonders einfach, wenn viele der Drehmassen Θ_λ und Federzahlen c_λ den gleichen Wert Θ bzw. c haben. Wird nämlich $\Theta^*=\Theta$ und $c^*=c$ gesetzt, dann folgt $\Theta'=c'=1$, so daß alle im Rechenschema mit diesen Werten auszuführenden Divi-

[1] Vgl. *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, S. 42ff., 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.

sionen und Multiplikationen mit dem Divisor bzw. Faktor 1 durchzuführen sind. Die Durchrechnung der vollkommen „homogenen" Maschine ($\Theta_\lambda = \Theta$ und $c_\lambda = c$) führt selbstverständlich auf die von *R. Grammel* eingeführten „reduzierten Frequenzfunktionen"[1].

5. Ein Zahlenbeispiel. Es sind die Eigenfrequenzen des durch folgende Daten gegebenen Drehschwingers[2] zu bestimmen:

$$\Theta_0 = 0{,}36 \text{ cm kg sek}^2, \qquad c_1 = \frac{1}{10} \cdot 10^5 \text{ cm kg},$$

$$\Theta_1 = 0{,}15 \text{ cm kg sek}^2, \qquad c_2 = \frac{1}{3} \cdot 10^5 \text{ cm kg},$$

$$\Theta_2 = 0{,}21 \text{ cm kg sek}^2, \qquad c_3 = \frac{1}{7} \cdot 10^5 \text{ cm kg},$$

$$\Theta_3 = 0{,}09 \text{ cm kg sek}^2.$$

Wird [vgl. (11.1) und (11.2)]

$$\Theta^* = 1 \text{ cm kg sek}^2 \quad \text{und} \quad c^* = 10^5 \text{ cm kg}$$

gewählt, so ergibt sich das Rechenschema von Tabelle 4 (vgl. Tabellen 2 und 3).

Tabelle 4. *Ausgefülltes Rechenschema zum Zahlenbeispiel.*

$\Theta_0' = 0{,}36$	$c_1' = \frac{1}{10}$					
$\Theta_1' = 0{,}15$						
0,51	3,6	0,54				
$\Theta_2' = 0{,}21$	1,53	1,0773	$c_2' = \frac{1}{3}$			
0,72	5,13	1,6173	1,62	0,3402		
$\Theta_3' = 0{,}09$	5,04	0,9153	11,3211	1,1647	$c_3' = \frac{1}{7}$	
0,81	10,17	2,5326	12,9411	1,5049	2,3814	0,21433

Man erhält also die Frequenzgleichung

$$F_4(\zeta) = \frac{x_4(\zeta)}{u_0 p} = A_{41}' - A_{42}'\,\zeta + A_{43}'\,\zeta^2 - A_{44}'\,\zeta^3 = 0,$$

$$= 0{,}81 - 2{,}5326\,\zeta + 1{,}5049\,\zeta^2 - 0{,}21433\,\zeta^3 = 0$$

oder

$$\zeta^3 - 7{,}0214\,\zeta^2 + 11{,}816\,\zeta - 3{,}7792 = 0. \tag{16}$$

Die Lösung nach dem *Horner-Newton*schen Verfahren (vgl. Abschn. 4) liefert $\zeta_1 = 0{,}4171$. Nach der Reduktion von (16) mit diesem Wert verbleibt die quadratische Gleichung

$$\zeta^2 - 6{,}6043\,\zeta + 9{,}061 = 0$$

mit den Wurzeln $\zeta_2 = 1{,}944$ und $\zeta_3 = 4{,}660$. Die Eigenfrequenzen ergeben sich gemäß (15) zu

$$\omega_i = \sqrt{\zeta_i \frac{c^*}{\Theta^*}} = \sqrt{\zeta_i \cdot 10^5 \text{ sek}^{-2}},$$

$$\omega_1 = \sqrt{4{,}171 \cdot 10^4}\,\text{sek}^{-1} = 204{,}2 \text{ sek}^{-1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{19{,}44 \cdot 10^4}\,\text{sek}^{-1} = 440{,}9 \text{ sek}^{-1},$$

$$\omega_3 = \sqrt{46{,}60 \cdot 10^4}\,\text{sek}^{-1} = 682{,}6 \text{ sek}^{-1}.$$

6. Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Rechenschemas; Vergleich mit dem Verfahren von W. A. Tuplin. Wir sahen [vgl. (13)], daß dem Rechenschema alle x_λ und u_λ unmittelbar entnommen werden können. Für den im Zahlenbeispiel behandelten Schwinger entnimmt man dem zugehörigen Rechenschema (Tabelle 4) z. B. die Ausschlagsamplitude der Drehmasse Θ_2 zu

$$u_2 = u_0 (1 - B_{31}'\,\zeta + B_{32}'\,\zeta^2),$$

$$u_2 = u_0 (1 - 5{,}13\,\zeta + 1{,}62\,\zeta^2).$$

---

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 366, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

[2] Vgl. Bericht *Klotter*, S. 13.

Mittels *Horner*schema erhält man bei der ersten Oberschwingung wegen $\zeta_2 = 1{,}944$ die Amplitude

$$u_2(\zeta_2) = -u_0 \cdot 2{,}6930 .$$

Auf diesem Wege kann man sich leicht alle (auf u_0 bezogenen) Ausschlagbilder verschaffen.

Wenn die Bestimmung der Eigenfrequenzen und damit die Bestimmung der Frequenzgleichung auch die wichtigste Aufgabe ist, so sollte doch gezeigt werden, daß die Ermittlung der Ausschlagbilder mit Hilfe des Rechenschemas sehr einfach ist.

Noch wertvoller erweist sich das leichte Auffinden aller $x_\lambda(\zeta)$ und $u_\lambda(\zeta)$ bei der Behandlung verzweigter Drehschwingungssysteme[1], insbesondere dann, wenn diese Systeme viele „inhomogene" Teile enthalten. Darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Ein Vergleich des Verfahrens von *Tuplin* mit dem hier beschriebenen Vorgehen an Hand einfacher Zahlenbeispiele[2] zeigt, daß hinsichtlich der Anzahl der Rechenoperationen keine nennenswerten Unterschiede bestehen. Die Durchführung der Rechenoperationen ist bei *Tuplin* jedoch etwas umständlicher und zeitraubender: Aus den Daten des Drehschwingers müssen mehrmals für die Rechnung geeignete Konstanten gebildet werden, während hier sofort mit den Daten gerechnet werden kann, und außerdem jeder einzelne Wert nur einmal für eine Reihe aufeinander folgender Divisionen oder Multiplikationen gebraucht wird. Auch ist es für das numerische Rechnen vielfach störend, wenn drei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen zu addieren sind, wie dies bei *Tuplin* der Fall ist, nicht aber bei Anwendung des hier beschriebenen Rechenschemas. Wollte man als Vergleichsmaßstab die Anzahl der anzuschreibenden Zahlen heranziehen, so würde das Verfahren von *Tuplin* ebenfalls schlechter abschneiden.

Als sehr vorteilhaft gegenüber dem Verfahren von *Tuplin* erweist sich das hier beschriebene Vorgehen in den zuvor angedeuteten Fällen, in denen die Ausschlagsamplituden oder die Drillmomentenamplituden in ihrer expliziten Form $u_\lambda(z)$ bzw. $x_\lambda(z)$ benötigt werden: Sie können dem Rechenschema sofort entnommen werden, während für ihre Ermittlung nach *Tuplin* eine Reihe von Umrechnungen erforderlich wäre (s. auch Bericht *Klotter*, S. 33—34).

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich für die Behandlung beidseitig eingespannter Drehschwinger (analog zu Abschn. 3) ebenfalls ein einfaches Rechenschema aufstellen läßt. An die Stelle der Randbedingungen $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = 0$ treten dann die Bedingungen $u_0 = 0$ und $u_n = 0$. Die Frequenzgleichung eines einseitig eingespannten Drehschwingers ($x_0 = 0$, $u_n = 0$) kann mit dem hier abgeleiteten Rechenschema aus der Bedingung $u_n = 0$ ermittelt werden.

7. Abschließende Bemerkungen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das beschriebene Vorgehen besonders für die Berechnung inhomogener Drehschwinger geeignet ist. Dies liegt in erster Linie daran, daß man die Frequenzgleichung mit geringem Aufwand explizit berechnen und auch beliebig genau lösen kann (s. Abschn. 4).

Einen interessanten Hinweis bekam der Verfasser von Herrn Prof. Dr.-Ing. *L. Cremer* (TU Berlin): Die umgekehrte Problemstellung der vorliegenden Arbeit hat man in der Regelungstechnik, nämlich die Bestimmung der zu einer vorgegebenen Frequenzgleichung gehörigen Schwingungskette mit ihren einzelnen Gliedern. Die Lösung dieses Problems ist mit dem bekannten *Routh*schen Schema[3] möglich. Das hier abgeleitete Schema läßt sich also als eine Umkehrung des *Routh*schen Schemas deuten.

Mitteilung aus dem Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen am 25. April 1960.)

Anschrift des Verfassers: cand. ing. *Ralf Priebs*, Heinrich-Hertz-Institut, Abteilung Mechanik, Berlin-Charlottenburg 2, Jebensstraße 1.

---

[1] *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 385, 2. Aufl.

[2] Vgl. Beispiel im Bericht *Klotter*, S. 20 und Beispiel in Abschn. 5 der vorliegenden Arbeit.

[3] Siehe hierzu: *E. J. Routh*, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. 2, S. 222ff., Leipzig 1898; *W. Cauer*, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. 1, S. 196ff., Leipzig 1941; *L. Cremer*, Z. Regelungstechn., 1 (1953) S. 38.

Zur Ermittlung der Wirkungslinie des Massenwiderstandes eben bewegter Scheiben und Getriebeglieder

Von F. Manna

1. Einleitung. Zur Ermittlung der Wirkungslinie der resultierenden Trägheitskraft $\boldsymbol{P} = -m\,\boldsymbol{b}_S$ eines eben bewegten starren Systems — mit der Masse m und dem Trägheitsmoment I für den Schwerpunkt —, dessen Beschleunigungszustand durch die Beschleunigungen $\boldsymbol{b}_A$ eines beliebigen Punktes A und $\boldsymbol{b}_S$ des Schwerpunktes S bestimmt wird, sind bis jetzt vier verschiedene graphische Verfahren vorgeschlagen worden.

Das erste[1] setzt die Kenntnis des Beschleunigungspoles P^* voraus, da die gesuchte Gerade t durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie $\overline{P^*S}$ mit der Antipolare von P^* bezüglich des um S geschlagenen Kreises vom Halbmesser $\varrho = \sqrt{I/m}$ hindurchgeht. Dieser ist, nebenbei bemerkt, der antireziproke oder antikonjugierte Punkt von P^* (von *Federhofer*[2] als Antipol von P^* bezeichnet).

Das zweite Verfahren liefert t als Antipolare in bezug auf den gleichen Kreis eines nur mit Hilfe des Beschleunigungsplanes bestimmbaren und deshalb gleichfalls mit der Stellung der Scheiben veränderlichen Punktes[2].

Die übrigen beiden Verfahren beruhen entweder auf der Möglichkeit, die Scheibenbewegung in eine durch $\boldsymbol{b}_A$ gekennzeichnete Translation und eine Drehung um A zu zerlegen[3] oder auf einfachen geometrischen Eigenschaften[4]. Beide verlangen die vorläufige Bestimmung des Trägheitsmittelpunktes in bezug auf A, d. h. des antireziproken Punktes L_A von A in der Antipolarität bezüglich des wiederholten Kreises, und sind weitaus einfacher als die vorhergehenden, da die Stellung von L_A unveränderlich ist.

Die Konstruktion, die wir unter Benutzung der Ähnlichkeit einiger Dreiecke finden werden, beruht gleichfalls auf der Eigenschaft des Trägheitsmittelpunktes (Schwingungsmittelpunktes). Bei der Betrachtung des in der Getriebepraxis ziemlich häufig vorkommenden allgemeinen Falles, in dem die Beschleunigungen zweier beliebiger mit S auf einer Geraden liegender Gelenkpunkte A und B gegeben sind, werden wir zeigen, daß unsere Konstruktion sich noch einfacher als die von *O. Tolle* erweist; denn mit L_A und L_B vermeidet sie sowohl das für die Anwendung der ersten Konstruktion dieses Verfassers notwendige Aufzeichnen des Beschleunigungsplanes, als auch die Bestimmung von $\boldsymbol{b}_S$, die zum Voraus von allen übrigen Verfahren gefordert wird.

Aus dem Folgenden wird sich sowohl in unserer wie auch in den *Tolle*schen Konstruktionen der Vorteil zeigen, den einzelnen bzw. die beiden Trägheitsmittelpunkte möglichst durch „direkte" Versuche festzustellen, nämlich durch Versuche, welche jede Konstruktion von antireziproken Punkten erübrigen.

2. Beschleunigung eines Gelenkpunkts gegeben. Wir erinnern uns zuerst daran, daß $\boldsymbol{b}_A$ ohne weiteres durch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung der Scheibe um den Drehpol bestimmt werden kann. Ist $\boldsymbol{b}_A$ gegeben oder bestimmt worden, so kann $\boldsymbol{b}_S$ bekanntlich als resultierender Vektor von $\boldsymbol{b}_A$ und der Relativbeschleunigung des Punktes S um A angesehen werden, welche sich ihrerseits (Abb. 1) aus der Normalbeschleunigung $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}^n_{SA}$ und der Tangentialbeschleunigung $\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{b}^t_{SA}$ zusammensetzt.

Ist $\dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung der betreffenden Bewegung und stellt also $-I\,\dot{\omega}$ das Moment von $\boldsymbol{P}$ bezüglich S dar, so wird der längs der Verbindungslinie $\overline{AS}$ gemessene Abstand s der Geraden t von S zu $I\,\dot{\omega}/(m\,b_S \sin\alpha)$ wobei α der von $\boldsymbol{b}_S$ mit der Verlängerung von $\overline{AS}$ gebildete Winkel ist.

---

[1] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926) S. 58.
[2] *K. Federhofer*, Z. VDI 74 (1930) S. 234.
[3] *O. Tolle*, Z. VDI 74 (1930) S. 1453.
[4] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 19 (1951) S. 355; M. T. Z., 15 (1954) S. 47.

Wird $I = m \cdot \overline{AS} \cdot \overline{SL}_A$ und $\dot{w} = b'_{SA}/\overline{AS}$ eingesetzt, so ergibt sich

$$s = \overline{SL}_A \frac{b'_{SA}}{b_S \sin \alpha}, \tag{1}$$

und die s darstellende Strecke wird sich in Abb. 1 links von S finden, wenn $\dot{\omega}$ Gegenzeigerrichtung hat.

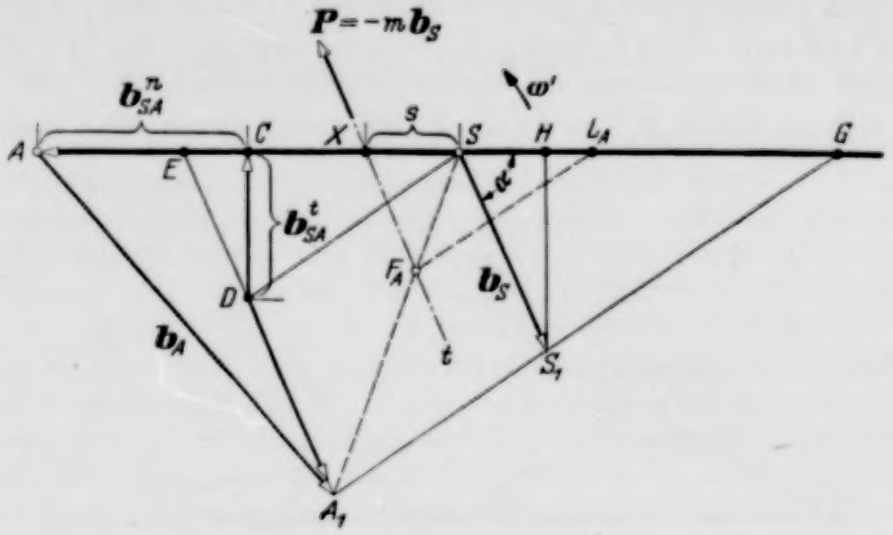
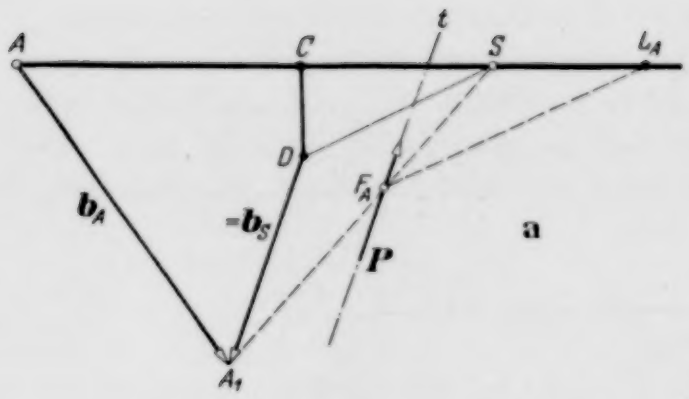


Abb. 1.



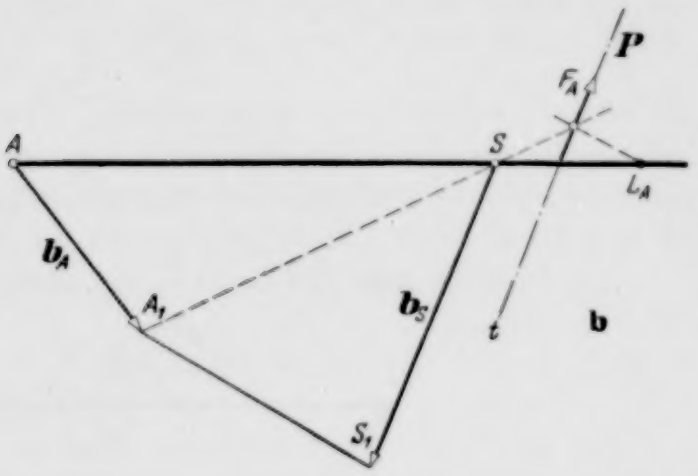


Abb. 2.

Dies vorausgesetzt, verbinden wir mit S die Endpunkte D und A_1 des dem Vektor $\boldsymbol{b}_S$ gleichwertigen Vektors $\overrightarrow{DA}_1$, dessen Verlängerung $\overline{AS}$ in E schneidet. Wir ziehen durch L_A und A_1 die Parallelen zu $\overline{DS}$, die sich mit $\overline{A_1S}$ in F_A bzw. mit der Verlängerung von $\overline{AS}$ in G schneiden. Ist X der Schnittpunkt von $\overline{AS}$ und der Parallelen durch F_A zu $\overline{DA}_1$, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit des Dreieckspaares (XF_AS, EA_1S) und (SF_AL_A, SA_1G)

$$\overline{XS} = \overline{SL}_A \frac{\overline{ES}}{\overline{SG}}. \tag{2}$$

Wird mit S_1 der Endpunkt von $\boldsymbol{b}_S$ bezeichnet, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der anderen Dreiecke EDS und SS_1G die Beziehung $\overline{ES}/\overline{SG} = \overline{DC}/\overline{S_1H} = b'_{SA}/(b_S \sin \alpha)$, wodurch die rechten Seiten von (1) und (2) identisch werden. Hieraus folgt $\overline{XS} = s$, und die gesuchte Gerade t fällt mit der zu $\boldsymbol{b}_S$ konstruktionsmäßig parallel gezogenen Verbindungslinie $\overline{XF_A}$ zusammen, die man durch die Kenntnis des Schnittpunktes F_A von $\overline{A_1S}$ mit der Parallelen durch L_A zu $\overline{DS}$ bzw. zu $\overline{A_1S_1}$ leicht feststellen kann. Die Aufgabe löst sich also durch Aufzeichnen der drei Geraden $\overline{DS}$, $\overline{A_1S}$ und $\overline{L_AF_A}$ (Abb. 2a) bzw. $\overline{A_1S_1}$, $\overline{A_1S}$ und $\overline{L_AF_A}$ (Abb. 2b), je nachdem $\boldsymbol{b}_S$ in der obengenannten Weise unter Benutzung des Beschleunigungsplanes gefunden oder als in S angreifender Vektor

gegeben wird. In diesem letzten Falle darf $\boldsymbol{b}_S$ nicht willkürlich, sondern muß bekanntlich so angegeben werden, daß die Verbindungslinie der Endpunkte der „reduzierten" Beschleunigungen $\boldsymbol{b}_S/\omega^2$ und $\boldsymbol{b}_A/\omega^2$ senkrecht zu $\overline{AS}$ ausfällt[1].

3. Beschleunigung zweier Gelenkpunkte gegeben. Nehmen wir nun ganz allgemein an, daß diese Bedingung für die Beschleunigungen $\boldsymbol{b}_A$ und $\boldsymbol{b}_B$ zweier Gelenkpunkte A und B, die mit dem leicht zu ermittelnden Schwerpunkt S ein Dreieck bilden (Abb. 3), sich als befriedigend erweist. In diesem Zustand muß man zuerst $\boldsymbol{b}_S$ finden, indem man über $\overline{A_1B_1}$ das zu ABS ähnliche Dreieck $A_1B_1S_1$ zeichnet und dann von einem der beiden Trägheitsmittelpunkte aus, z. B. vom L_A, die Parallele zu $\overline{A_1S_1}$ ziehen, welche $\overline{A_1S}$ im Punkt F_A schneidet, durch den t hindurchgeht.

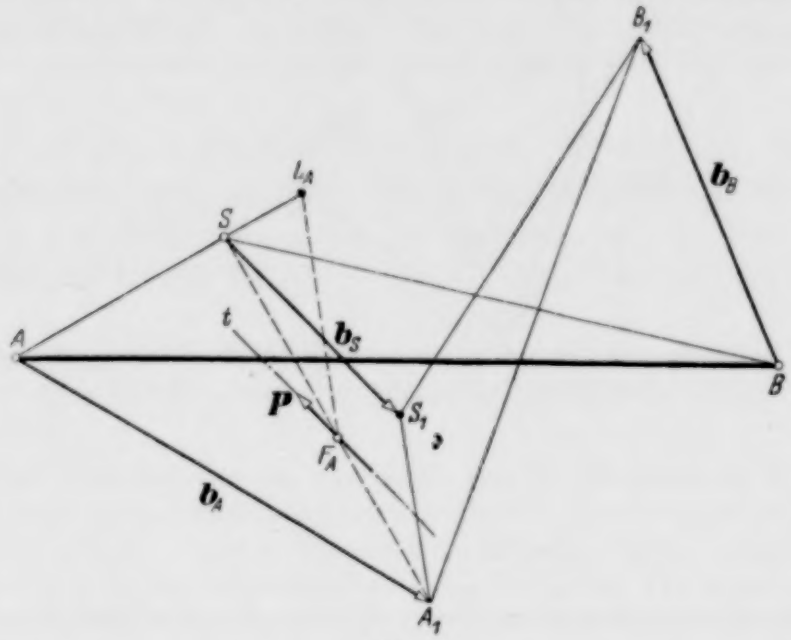


Abb. 3.

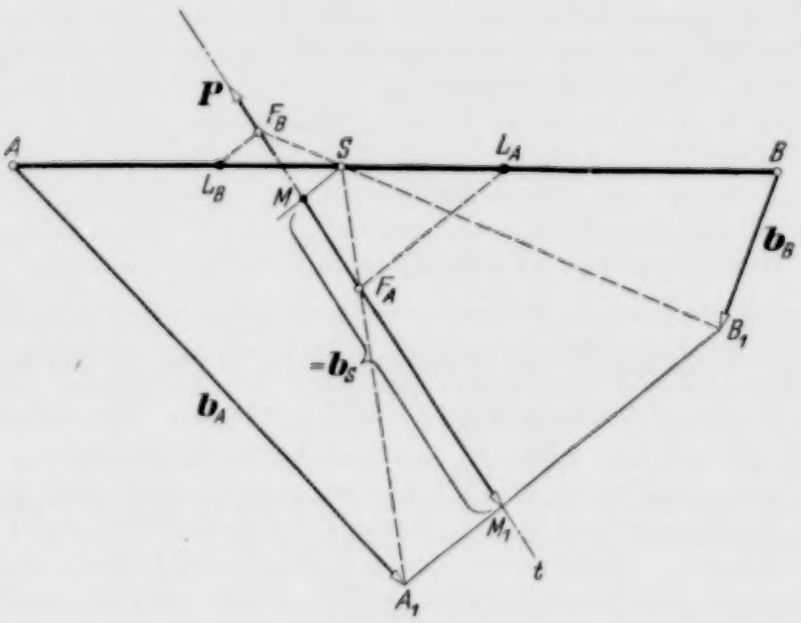


Abb. 4.

Liegt jedoch S auf $\overline{AB}$ (Abb. 4), dann lohnt es sich folgendermaßen zu verfahren: Man zeichne auf $\overline{AB}$ die Punkte L_A, S und L_B und verbinde A_1 mit B_1. Man ziehe durch L_A und L_B zwei Parallelen zu $\overline{A_1B_1}$ die sich mit $\overline{A_1S}$ und $\overline{B_1S}$ bzw. in F_A und F_B schneiden, deren Verbindungslinie schon die gesuchte Gerade t darstellt. So erübrigt sich jede Ermittlung von $\boldsymbol{b}_S$, wie überhaupt das letzte Verfahren fähig ist, die graphische Lösung aller Probleme bedeutend zu beschleunigen, wie z. B. die Bestimmung des Trägheitspols[2], bei welchen die Kenntnis der Größe und Richtung

[1] *M. Manarini*, Ricerche di Ingegneria, 1938, H. 3, S. 70.
[2] *O. Tolle*, Feinwerktechnik, 61 (1957) H. 9.

von P entbehrlich ist. Schneidet man übrigens t mit einer weiteren, zu $\overline{A_1B_1}$ durch S gezogenen Parallelen sowie mit $\overline{A_1B_1}$ selbst, so erhält man die Endpunkte M und M_1 des mit $\boldsymbol{b}_S$ gleichwertigen und daher für die Ermittlung der noch unbekannten Elemente geeigneten Vektors $\overrightarrow{MM_1}$.

4. Bemerkungen über die Trägheitsmittelpunkts-Bestimmung. In allen vorhergehenden Konstruktionen ist nun zu beachten, daß die Strecke $\overline{AL_A}$ die Länge des mit dem in A aufgehängten isochronen physikalischen Pendels darstellt, welches um die normal zur Bewegungsebene durch A gehende Achse kleine Schwingungen ausführt, und daß daher

$$\overline{AL_A} = \frac{g}{4\pi^2} T_A^2 \tag{3}$$

ist, wobei mit T_A die entsprechende Schwingungszeit bezeichnet wird.

Liegt der betreffende Körper in Ausführung vor, und ist wegen der Unregelmäßigkeit seiner Form die experimentelle Bestimmung von T_A notwendig, so ist es vorteilhafter, statt diesen Wert zu benutzen, um zuerst I und dann ϱ zu erhalten, den gemessenen Wert von T_A gleich in (3) einzuführen und sich ebenfalls jede Konstruktion von antireziproken Punkten zu ersparen. Nimmt man noch an, daß $\overline{AL_A}$ das Verhältnis zwischen einem Trägheitsmoment und einem statischen Moment ist und daher unabhängig von der Dichte des schwingenden Materials, dann versteht man auch, daß der obengenannte T_A-Wert an einer einfachen Schablone aus Blech oder Pappe gemessen werden kann, wofür Gleichung (3) auch dann anwendbar bleibt, wenn von dem Körper nur die Zeichnungen zur Verfügung stehen und man sich die bekannten zeitraubenden graphischen Methoden ersparen will. Handelt es sich also um ein homogene Scheibe gleicher Dicke, so hat diese Schablone den gleichen Umriß wie die Scheibe; im Falle irgendeines anderen gleichartigen Körpers muß sie aber so profiliert werden, daß die auf Körper und Schablone — mittels Zylinderflächen gleiches Halbmessers, deren Achsen die Aufhängeachse bzw. die durch A gehende Achse sind — durchgeschnittenen Flächen gleich sind.

Bleibt der Beschleunigungszustand durch $\boldsymbol{b}_A$ und $\boldsymbol{b}_B$ bestimmt, so wäre es lohnend, auch T_B zu messen und $\overline{BL_B}$ durch die auf die Schwingungen um B bezügliche Formel zu erhalten. Auf diese Weise kann man S bestimmen, entweder als Schnittpunkt der beiden Strecken $\overline{AL_A}$ und $\overline{BL_B}$ oder, wenn diese übereinstimmen, als Endpunkt der Senkrechten zu $\overline{AB}$ durch den Punkt N, in welchem sich die beiden Halbkreise, deren Durchmesser $\overline{AL_A}$ und $\overline{BL_B}$ sind, schneiden.

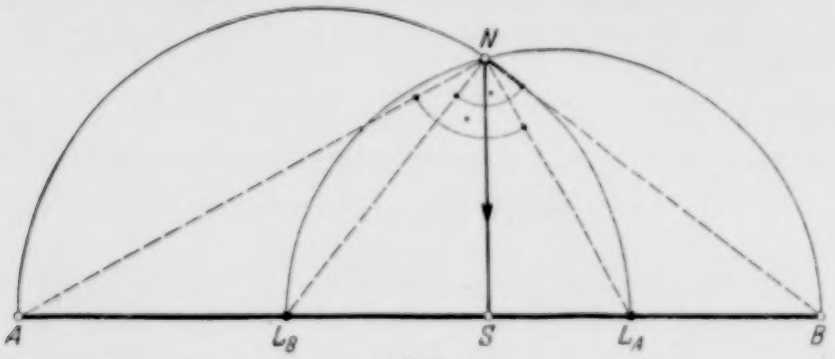


Abb. 5.

Diese zuletzt in Abb. 5 angegebene Konstruktion läßt sich dadurch rechtfertigen, daß sich als Folge der Gleichungen

$$\varrho^2 = \overline{SL_A} \cdot \overline{AS} = \overline{SL_B} \cdot \overline{BS}$$

$\overline{NS} = \varrho$ ergibt. Man kann hier auch der analytischen Ermittlung den Vorzug geben, indem man die Verhältnisse $\xi_A = \overline{AL_A}/\overline{AB}$ und $\xi_B = \overline{BL_B}/\overline{AB}$ herstellt und auf $\overline{AB}$ vom A ausgehend die Strecke $\overline{AB}\,(1-\xi_B)/[2-(\xi_A+\xi_B)]$ abschneidet, die, wie man leicht feststellen kann, $\overline{AS}$ darstellt.

Auf jeden Fall ist sowohl die Konstruktion nach Abb. 5 als auch die besagte analytische Bestimmung bei weitem allen anderen Methoden, um S aufzufinden, vorzuziehen, da man die Schwingungszeiten T_A und T_B mit genügend großer Genauigkeit erhalten kann, indem die Messung auf eine Reihe zahlreicher Schwingungen ausgedehnt wird.

(Eingegangen am 2. Mai 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor Ing. *Filippo Manna*, Casalnuovo di Napoli (Italien), Corso Umberto, 389.

Berichtigung

zu meinen Aufsätzen „Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen" in Band 27, S. 88, und „Der Einfluß der Kraftwagenfederung auf die Lenkstabilität" in Band 29, S. 100 des Ingenieur-Archivs.

Von **G. Mitterlehner**

Zur erstgenannten Arbeit ist zu ergänzen, daß bei Berücksichtigung der Trägheitskopplung zwischen Lenk- und Gierschwingung in der Gleichung (1c), in der dritten Gleichung (14) und in der dritten Gleichung (25) $\ddot{\varphi}$ durch $(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi})$ zu ersetzen ist. Dadurch werden die Ergebnisse der Abschnitte 7 bis 9 nur bei hohen Frequenzen der Lenkschwingung brauchbar. In Abb. 7 fällt der ganze erste Quadrant der (n, v)-Ebene in den stabilen Bereich, und in Abb. 8 wird die Stabilitätsgrenze eine Gerade $v = \text{konst.}$

In der zweiten Arbeit verändert der durch die dritte Gleichung (4) eingeführte Fehler je nach Fahrzustand und Konstruktion die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung nur geringfügig, da in diesen Beziehungen die von den Kreiselmomenten der Räder stammenden Glieder überwiegen.

(Eingegangen am 21. Dezember 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *G. Mitterlehner*, Wien II, Halmgasse 1/20.

Einführung in die theoretische Gasdynamik

Von Dr. Robert Sauer,

o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München

Dritte, verbesserte Auflage

Mit 120 Abbildungen. XII, 214 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 29,70

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Grundbegriffe: Grundgleichungen. Stationäre Strömungen. Stromlinienverlauf in stationärer Strömung. Geschwindigkeitspotential der wirbelfreien stationären Strömung. Stromfunktion der stationären ebenen und achsensymmetrischen Strömung · Linearisierte stationäre Strömung um Profile und Drehkörper: Linearisierung der Potentialgleichung. Linearisierte Unterschallströmung. PRANDTLsche Regel. Linearisierte ebene Überschallströmung. Linearisierte Überschallströmung um Drehkörper. Asymptotische Entwicklungen für überschlanke Körper · Nichtlinearisierte stationäre ebene und achsensymmetrische stoßfreie Strömung: Potenzentwicklungen für wirbelfreie Unterschallströmungen. Potenzentwicklungen für die transsonische Strömung in LAVAL-Düsen. Darstellung ebener wirbelfreier Strömungen in der Hodographenebene. Hodographenverfahren zur Berechnung ebener wirbelfreier Unterschallströmungen und transsonischer Strömungen. Charakteristikenverfahren zur Berechnung ebener wirbelfreier Überschallströmungen. Beispiele ebener wirbelfreier Überschallströmungen. Erweiterung des Charakteristikenverfahrens auf nichtisentropische und auf achsensymmetrische Überschallströmungen · Verdichtungsstöße in stationären Überschallströmungen. Transsonische und hypersonische stationäre Strömungen: Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes. Stoßpolarendiagramm. Entropiezunahme beim Verdichtungsstoß. Achsensymmetrische Überschallströmung um einen Drehkegel. Weitere Beispiele von Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen. Transsonische und hypersonische ebene Strömungen · Räumliche, nicht achsensymmetrische stationäre Strömungen: Singularitätenverfahren für die linearisierte Strömung um einen Tragflügel endlicher Breite. Linearisierte kegelsymmetrische Überschallströmung. Halblineare Verfahren. Literaturhinweise · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Thermische Turbomaschinen

Von Dr. Walter Traupel,

o. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Vor kurzem erschien:

Zweiter Band:

Regelverhalten, Festigkeit und dynamische Probleme

Mit 459 Abbildungen. VIII, 420 Seiten 4°. 1960. Ganzleinen DM 61,50

INHALTSÜBERSICHT

Regelung der Dampfturbinen · Regelung der Turboverdichter · Regelung der Gasturbinen · Festigkeit der Schaufelungen · Festigkeit der Rotoren · Festigkeitsprobleme an stillstehenden Teilen · Temperatur- und Kühlungsprobleme · Schaufelschwingungen · Dynamische Probleme des Läufers · Anhang: Werkstoffeigenschaften · Jedes Kapitel enthält ein Literaturverzeichnis · Liste der Formelzeichen · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Moderne Turbomaschinen-Anlagen stellen oft schwierige regeltechnische Probleme, deren Lösung eine sehr genaue Kenntnis des Regelverhaltens voraussetzt. Dieses wird daher im vorliegenden Buch eingehend behandelt. Weiter sind die Festigkeitsprobleme des Turbomaschinenbaues vor allem im Zusammenhang mit den hohen Temperaturen und Drücken sehr komplex geworden und erfordern eine entsprechend genaue Erfassung. Endlich zwingen die in der Praxis immer noch gelegentlich auftretenden Laufstörungen und Schaufelbrüche dazu, die dynamischen Berechnungen viel weiter zu treiben als dies früher üblich war. Alle diese Fragenkomplexe erfahren daher in diesem zweiten Band eine gründliche Darstellung.

Früher erschien:

Erster Band:

Thermodynamisch-strömungstechnische Berechnung

Mit 402 Abbildungen und 6 Tafeln. XII, 407 Seiten 4°. 1958. Ganzleinen DM 58,50

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6